This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

R. BIBLIOTECA
11
Atti Accad.
55
ROMA
CENTRALE V. E. II

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Ah Acc. 55

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI

Piazza dei Cavalieri, 5

1921

J71.695.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE DEI FASCICOLI DEL VOLUME VI

DELLA NUOVA SERIE DEGLI « ANNALI DELLE UNIVERSITÀ TOSCANE »

(XL DELLA COLLEZIONE).

Fasc. 1. — ARTURO SOLARI. *La rete stradale iberica secondo gli itinerari di Vicarello* [pag. 1-15] Pag. 3

» **2.** — GIULIO BUONAMICI. *La questione etrusca. Importanza, natura e metodo della etruscologia.* — Prolusione al corso di etruscologia letta nella R. Università di Pisa il 24 febbraio 1920 [pag. 1-42] . . . . . » 17

» **3.** — VINCENZO BIAGI. *Il Fiore, il Roman de la Rose e Dante* [1-86] . . . . . » 59

» **4.** — ANDREA VACHETTA. *Unicuique suum.* Alcune rivendicazioni storico-chirurgiche [pag. 1-19] » 145

» **5.** — BIAGIO BRUGI. *In memoria di Carlo Francesco Gabba.* Commemorazione letta nell' Aula Magna della R. Università di Pisa addì 21 febbraio 1921 per deliberazione della Facoltà di Giurisprudenza [pag. 1-20] . . » 165

» **6.** — ARTURO SOLARI. *Silvium colonia Tarantina.* [pag. 1-19] . . . . . » 185

» **7.** — UGO PARDI. *Ricerche sull'anafilassi* [pag. 1-40] » 205

» **8.** — ULISSE DINI. *Lezioni sulla teoria generale delle Serie.* [pag. 1-92] . . . . . » 245

Digitized by Google

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 1.

PISA
TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI
Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

I.

ARTURO SOLARI

LA RETE STRADALE IBERICA

SECONDO GLI

ITINERARI DI VICARELLO

Digitized by Google

Digitized by Google

L'importanza dell'Itinerario scritto nei quattro vasi argentei trovati a Vicarello a nord del lago Sabatino [1], dove nell'antichitá erano celebrati i suoi bagni e la loro efficacia medica, è, nei riguardi del tratto che tocca la Spagna, duplice, sia perché permette di determinare il tempo della sua redazione e quindi dell'oggetto votivo, sia perché conferma che la via Augusta, che è poi quella segnata, era la principale arteria della provincia, a cui facevano capo tutte le altre vie tanto principali, quanto secondarie.

Il percorso è da Gades a Iuncaria, che sono le estreme stazioni della via; e comprende i tre tratti, cioè della regione Betica, della Citeriore interna ed esterna — a Gades, ad Portum, Hasta, Ugia, Orippo, Hispalini, Carmone, Obucla, Astigi, Ad Aras, Corduba, ad $\overline{X}$, Epora, Uciese, ad Novolas, Castulone, ad Morum, ad duo Solaria, Mariana, Mentesa,

[1] Vedi la mia *Top. st. dell' Etruria* I p. 192 sgg. e *CIL.* XI p. 496 e seguenti, con le iscrizioni 3231-3284 che riproducono con molta particolaritá, secondo quattro redazioni diverse, l'indicazione delle singole stazioni, con le distanze dall' una all' altra, della via che dall' estremo della Spagna, da Cadice, conduceva, per terra, a Roma.

Digitized by Google

Libisosa, Parietinis, Saltigi, ad Palem, Ad Aras, Saetabi, Sucrone, Valentia, Sagunto, ad Novlas, Ildum, Intibili, Dertosa, sub Saltu, Tarracone, Palfuriana, Antistiana, ad Fines, Arragone, Praetorio, Seterras, Aquis Voconis, Gerunda, Cinniana, Iuncaria[1] —. Appartiene la guida al tempo anteriore a quando si congiunse direttamente Castulo con Caesaraugusta, costruzione che è contemporanea a quando si collegò Laminium con Castulo[2]. Ossia non è anteriore all'etá di Augusto, e lo studio dei particolari della guida ci fa ammettere che appena costruito il tratto della Betica, che congiungeva la costa orientale colla parte sud-ovest della regione, si fecero varie copie del nuovo itinerario per Roma. Poiché, giá si è veduto[3], la strada, che per la Spagna metteva in Italia, non ebbe sempre la medesima direzione e uguale percorso. La piú antica, di cui è traccia nelle fonti letterarie[4], era assolutamente costiera e seguiva la costa da Calpe fino a Summum Pyrenaeum[5]; l'augustea tagliò fuori tutta la costa da Valentia a Calpe, continuando la strada da Valentia per l'interno fino a Castulo e per il percorso della Betica lungo il Baetis; la recente, cioè la posteriore ai tempi di Augusto, escluse il tratto litoraneo da Barcino a Valentia e collegando Barcino con Caesaraugusta proseguiva nell'interno fino a Castulo.

[1] Nel *CIL.* XI citato è fatto il riscontro tra le quattro copie dell'itinerario, e vengono segnate le reciproche differenze.

[2] Sulla *Via Augusta* uscirá prossimamente una *Nota* in *Bollettino d. Comm. Arch. Com.* di Roma.

[3] Nella *Nota* citata.

[4] STRAB. III 161: ἡ μὲν δὴ παραλία πᾶσα ἡ ἀπὸ στηλῶν μέχρι τῆς μεθορίας τῆς Ἰβήρων καὶ Κελτῶν τοιαύτη.

[5] STRAB. III 160: (οἱ Ἐμπορῖται) δὲ καὶ τῶν τῆς Πυρήνης ἄκρων νέμονται μέχρι τῶν ἀναθημάτων τοῦ Πομπηίου, δι' ὧν βαδίζουσιν εἰς τὴν ἔξω καλουμένην Ἰβηρίαν ἐκ τῆς Ἰταλίας καὶ μάλιστα τὴν Βαιτικήν.

Digitized by Google

Il fatto che l'Itinerario Ispanico di Vicarello è la Via Augusta, ed altresí che quello era il percorso che un provinciale della Spagna doveva fare per andare a Roma a traverso la Gallia e l'Italia Superiore, ci dicono che a quella necessariamente dovevano far capo le altre vie secondarie, senza essere costretti ad ammettere che tale itinerario doveva essere la Via Augusta, poiché probabilmente i viaggiatori erano di Gades, o di un altro luogo che si trovasse sulla via. È ad ogni modo fuor di dubbio che a questa arteria facevano capo le vie della provincia; anche l'Emeritese, quando si consideri questa facente capo all'ultimo tratto stradale dell'Augusta, cioè alla sezione Caesaraugusta-Ilerda-Barcino.

Le altre due vie, che prendevano nome da Emerita e che erano rivolte a Caesaraugusta, egualmente sboccavano sull'Augusta, perché l'una, diretta a nord, metteva per Ocelum-Duri sulla linea Asturica-Caesaraugusta, l'altra, volta a sud, passando per Titulcia finiva a Laminium, che era un nodo stradale dell'Augusta.

Nella Lusitania erano capi di vie le due cittá principali della regione: cioè Olisipo a ovest e Emerita a est, situate l'una e l'altra ai confini della terra. Stando alle notizie degli Itinerari antichi, da quei principali centri partivano rami stradali; da Olisipo direttamente a Bracàra Augusta (420, 8-422, 1), da Emerita per tre vie, come si è veduto[1], a Caesaraugusta traversando Toletum (438, 2-439, 4), passando per Ocelum Duri-Asturica (433, 1-434, 6) e facendo capo a Laminium (144, 3-445, 4). È facile a vedersi come le quattro vie andavano poi a congiungersi con l'Augusta; poichè Bracara costituiva il centro stradale, cui si annoda-

[1] Nella *Nota* che, a giorni, uscirá nel *Bollettino* citato.

Digitized by Google

vano le vie provenienti dall'Asturica, dalla quale si diramavano i percorsi per Caesaraugusta e per Castulo, che erano i due punti capitali della via Augusta, a nord e a sud. Cinque erano le vie che in varia direzione allacciavano Bracara e Asturica, i centri della Gallaecia e dell'Asturia; e di queste quattro sono documentate dagli Itinerari [1], la quinta non trova testimonianza letteraria, ma è senza dubbio assicurata dai molti cippi miliari che si sono conservati [2].

Varie erano le strade che congiungevano i vari punti della Lusitania sia nell'interno, sia nelle altre regioni della Iberia, di cui giá abbiamo veduto la Citeriore. Della Betica, oltre il tratto da Emerita a Laminium volto verso l'arteria Augusta, dobbiamo considerare due tronchi che facevano capo a Emerita; ma si univano all'Augusta l'uno mediante la deviazione della strada meridionale Pax Iulia-Hasta, dell'Augusta, l'altro attaccando a Corduba, centro dell'Augusta Betica. Di quest'ultima si fa menzione nella tradizione letteraria — *a Corduba Emeritam* [3]; — mentre del ramo Pax Iulia-Hasta, quantunque nelle Guide non si faccia parola, è confermata l'esistenza e quindi la sua conoscenza dal confronto con l'Anonimo Ravennate, che unisce Hasta con Pax-Iulia [4].

[1] Cfr. 422, 2-423, 5 (Bracara-Compleutica-Asturica); 427, 4-429, 4 (Bracara-Nemetobriga-Asturica); 429, 5-431, 3 (Bracara-Lucus Augusti-Asturica) 428, 6 (Bracara-Lucus Augusti). Queste due ultime vie che appaiono col medesimo percorso sono giá distinte nello stesso Itinerario, che chiama la seconda — *per loca maritima a Bracara Asturicam*; — donde è di per sè evidente che la prima, nelle due prime parti, era interna.

[2] Cfr. specialmente *CIL.* II p. 636 sgg. *Eph. epigr.* VIII p. 461 e IX p. 415 e 416.

[3] *It.* 415,3-416,3. Il tratto passava per le stazioni Metellinum-Astigi-Mellaria, facendo fine a Corduba.

[4] Su ció la *Nota,* che vedrá la luce nei *Rendiconti dell'Istituto Lombardo.* L'ANON. RAVENN. fa menzione del tronco suddetto a p. 306, 5-7.

Digitized by Google

Le comunicazioni interne della Lusitania, fra i vari centri, avevano come termine finale o Olisipo o Emerita, centri che abbiamo veduto in unione con la via Augusta. Tanto le notizie letterarie,[1] quanto le monumentali ci informano su piú rami stradali che fra loro s'incrociavano, e sebbene il loro percorso riveli esigenze economiche, poiché passava per abitati che altrimenti sarebbero stati tagliati fuori, tuttavia nella rete stradale erano queste vie subordinate ai punti principali della regione. Cosí la via da Emerita a Scallabis coincideva nel primo tratto dopo Emerita fino ad Septem Aras con quella di Olisipo; parimente la via della Lusitania meridionale Esuris-Pax Iulia, che congiungeva la costa meridionale con la via da Olisipo ad Emerita aveva in Ebora il punto a comune e quivi si riallacciava ai due luoghi capitali.

Le numerose comunicazioni, che nella Betica stringevano i rapporti dei molti abitati, hanno lasciato traccia nella letteratura. Ed è facile vedere come uno dei centri estremi della via è quasi sempre un punto della grande arteria dovuta ad Augusto. Cosí *a Corduba Castulone*[2], *a Castulone Malacam*[3], *a Malaca Gadis*[4], *a Gadis Corduba*[5] *ab Hispali*

[1] *It.* 416,4-418,5 *ab Olisipone Emeritam;* 418,7-419,6 *alio itinere ab Olisipone Emeritam;* 419,7-420,7 *alio itinere ab Olisipone Emeritam.*

[2] *It.* 402,6-403,3; dove ambedue gli estremi si trovavano sulla Via Augusta, ma le stazioni intermedie, che allacciavano tanto Corduba quanto Castulo, erano in una diramazione della via.

[3] *It.* 404,3-405,6.

[4] *It.* 405,7-408,4.

[5] *It.* 409,1-412,6. Probabilmente in questo percorso si ha una fusione di due vie, delle quali una sarebbe andata da Malaca a Corduba, l'altra da Malaca ad Hispalis. Alcuni miliari (*CIL.* II 4692, 4693) trovati a Cartima e a Nescania ci costringono ad ammettere una via diretta tra Malaga e Cordova, della quale facevano parte appunto le mansioni confuse nell'Itinerario di [Singilia] Barba-Anticaria-Angellae-Ipagrum-Ulia. E da Singilia Barba si staccava anche un ramo diretto ad Hispalis, traversando Ostippo-Ilipa (da correggersi in Ilipula)-Carula-Basilippo.

Digitized by Google

Emeritam[1] e la giá citata *a Corduba Emeritam*[2]. Quando si ricerca la direzione della via segnata nell'Itinerario come Hispalis-Emerita ci accorgiamo che il luogo della Guida è confuso con un altro, dove si traccia il percorso *ab ostio fluminis Anae Emeritam usque*[3]. Il tratto tra Hispalis ed Emerita è cosí descritto

Carmo
Obulcola
Astigi
Celti
Regina[4].

Confrontando con la Via Augusta risulta che la lista itineraria data è una unione di due tratti, dei quali uno appartenente all'Augusta e l'altro indipendente da essa, staccandosi ad Astigi. Cosí stando il percorso, la denominazione della via sarebbe stata *ab Astigi ad Emerita,* in quanto la dizione di Hispalis-Emerita fa legittimamente supporre una direzione affatto autonoma in tutto il suo tratto. Invece la via Ispalense si trova fusa con quella che realmente iniziava il percorso con la foce dell'Anas; e propriamente la prima sezione fino ad Italica costituiva la via dalla foce dell'Anas ad Italica[5]; da Italica ad Emerita seguiva la via Ispalese; in quanto Hispalis è congiunta con Italica, di cui si conserva ricordo nella Guida come tronco a sé[6]. Però se alla via descritta dalla Guida non può convenire il nome di Ispalese, dichiarato in quella stessa, non crediamo che

[1] *It.* 414,1-415,2.
[2] *It.* 415,3-416,3.
[3] *It.* 431,8-432,8.
[4] L'Itinerario erroneamente ha Regiana.
[5] Cioè Praesidium, ad Rubias, Onoba, Ilipa, Tucci, Italica. Ilipa va corretto in Ilipula.
[6] *It.* 413,6 *ab Hispali Italicam.*

Digitized by Google

sia inesatto il titolo dato alla via dalla foce dell'Anas ad Emerita, poichè Italica era il punto comune dove s'incontravano le due strade.

Anche la Via Malacitana per Iliberris aveva il suo riferimento con l'Augusta mediante la Via Malaca-Corduba, dalla quale si staccava probabilmente ad Anticaria. Di questa è lecito indurre l'esistenza da una pietra miliare [1], e con fondamento, per quanto non abbiamo alcun documento materiale, ha da ritenersi che proseguisse per Iliberris, sia per l'importanza di questo centro sia perché a Iliberris faceva capo una via della Citeriore.

Della rete stradale, che si svolgeva nella Citeriore, abbiamo avuto occasione, in parte, di parlare in una Nota descrittiva della Via Augusta [2].

In generale le vie della Citeriore si considerano in rapporto con la Lusitania, con la Betica, con l'Italia, con la Aquitania, oltre quelle di percorso esclusivamente interno; ossia una parte di esse trova la fine entro i limiti della regione, un'altra ha la continuazione all'esterno di codesti limiti. Lo sviluppo di questa successione di vie è conosciuto; è romano e specialmente imperiale, in quanto la civiltà romana ha impresso l'orma sua su tutte le costruzioni stradali dell'Iberia. Le più antiche, del periodo repubblicano, sono la litoranea orientale, che metteva in comunicazione l'estremo punto meridionale con l'Italia, e la settentrionale volta dalla costa verso l'interno [3]. Da queste si svolsero

[1] *CIL.* II 4695.

[2] Inserita nel *Bollettino* citato.

[3] STRAB. III 160 e 161. La litoranea il geografo così descrive: ἡ μὲν δὴ παραλία πᾶσα ἡ ἀπὸ στηλῶν μέχρι τῆς μεθορίας τῆς Ἰβήρων καὶ Κελτῶν τοιαύτη; la interna è indicata: ἡ ἐκ Ταρράκωνος ἐπὶ τοὺς ἐσχάτους ἐπὶ τῷ ὠκεανῷ Οὐάσκωνας τοὺς κατὰ Πομπέλωνα καὶ τὴν ἐπ' αὐτῷ τῷ ὠκεανῷ Οἰασῶνα πόλιν ὁδός ἐστι σταδίων διςχιλίων τετρακοσίων πρὸς αὐτὰ τὰ τῆς Ἀκυιτανίας ὅρια καὶ τῆς Ἰβηρίας.

Digitized by Google

tutte le altre, che ricordano le Guide stradali antiche; come l'Augusta, che fu la via principalissima di tutta la regione, ebbe la sua origine e il suo sviluppo dalla litoranea; e così la via Asturicese si spiegò dal primo tronco, che metteva nel territorio dei Vasconi (ἡ ἐκ Ταρράκωνος ἐπὶ τοὺς ἐσχάτους ἐπὶ τῷ ὠκεανῷ Οὐάσκωνας τοὺς κατὰ Πομπέλωνα... ὁδός). Donde la conseguenza naturale che dai vari centri della Citeriore fosse, per lo piú, diretta comunicazione con le due primitive e con le altre due da quelle derivate. Infatti i capistrada nella Iberia settentrionale sono Asturica e Caesaraugusta e a sud Castulo. Lungo la costa si possono considerare come nodi stradali Tarraco e Barcino. Bracara, quantunque centro stradale importante della Gallaecia, era subordinato ad Asturica per le comunicazioni con la Citeriore e la Betica.

L'Itinerario Antoniniano segna due vie dirette in Aquitania: *a Caesaraugusta-Benearnum* e *ab Asturica-Burdigalam*[1], quali furono costruite dai Romani; mentre è solito comprendere nel numero delle vie, oltre i Pirenei, anche un'altra accennata da Strabone, e che noi abbiamo considerato con la litoranea del tempo della repubblica[2]. Ci pare che realmente fossero due, di cui è ricordo nell'Itinerario. Certo in origine una comunicazione con l'Aquitania aveva come suo punto di partenza la cittá marittima di Tarraco. Ma in seguito, quando si strinsero in tutta la provincia comodi e facili rapporti coi varii luoghi, avvenne per l'antica via Aquitanica quel che ebbe a subire la via lungo la costa orientale; come questa da litoranea divenne mediterranea, pur mantenendo la direzione e la meta, cosí quella mutò percorso, ma, a differenza dell'altra, perdette anche interamente il fine suo, che era quello di mettere in Aquitania,

[1] 452,6-453,3 e 453,5-455,7.

[2] V. *Dis. Epigr.* del De Ruggiero *Hispania* p. 858.

Digitized by Google

e fu indirizzata alla volta dell'Asturica. Capi della strada Aquitanica divennero due centri che prima erano sul percorso della via Aquitanica, cioè Pompaelo e Forum Gallorum, l'uno sulla via da Asturica a Burdigala, l'altro su quella da Caesaraugusta a Benearnum.

Le notizie, che descrivono il percorso di queste strade, è lecito desumerle specialmente dalla solita Guida Antoniniana e dai ricordi delle mansioni nei non pochi miliari conservati[1]; il cui studio ci conduce facilmente a vedere come le non poche e diverse vie avevano sempre come termine definitivo la grande strada, per cui da Gades, traversando in tutta quanta la sua lunghezza la Iberia, si andava in Italia; e in questa appunto dovettero mettersi da un luogo eccentrico quei viandanti, che recarono descritto sui vasi argentei l'Itinerario, che essi dovevano percorrere per recarsi dalla Spagna alla volta di Roma.

[1] Per la Betica *It.* 401,6-402,5; 446,10-448,1; 402,6-403,3; 403,4-404,1; 404,2-8; nell'interno oltre il gruppo convergente da Bracara in Asturica, già sopra indicato, ci sono le altre che hanno, sostanzialmente, come estremi un punto della costa a est e a ovest Asturica (*It.* 440,1-443,2 e 448,4-453,5). Della via Emeritese già abbiamo parlato nella *Nota* già ricordata nel *Bollettino* cit. I dati monumentali sono raccolti nel *CIL.* II e nell'art. citato *Hispania* del *Dis. Epigr.* del De Ruggiero pag. 855.

Digitized by Google

Excursus. — Che le successive modificazioni della via Augusta siano dovute a ragioni commerciali e industriali non v' ha dubbio, come è certa l' origine della via lungo la vallata del Baetis, che fu costruita per mettere in diretta comunicazione con la Citeriore e con l' Italia i varii centri commerciali e industriali situati lungo il Baetis. Due fra questi eccellevano sugli altri, Gades e Corduba, commerciale il primo e industriale l'altro. Sulla fine del primo secolo a. C. Gades era cosí popolosa e ricca che per numero di abitanti era superata soltanto da Roma, e nessun' altra cittá anche Italica, all' infuori di Padova, aveva un tal numero di ricchi possidenti, da arrivare a 500[1]. Centro minerario era invece Cordova[2], dove affluivano dalle varie cave minerali vicine i metalli, che erano sottoposti alla lavorazione o destinati alla esportazione. Anche Castulo, nell' alta valle del Baetis, era un centro metallifero; e vicine si trovavano miniere di argento e di piombo[3], ricca specialmente la sorgente d' argento, tanto da assicurare il nome di *Argenteo* al monte. Appartiene a questo distretto minerario una iscrizione, che si trova sopra un pane di piombo, riportata inesattamente dall' Hübner nel CIL. II p. 1001[4]. Il ricordo, che ivi si fa di *fodinae* di un *Mons Argentarius*, è senza dubbio da collegarsi con l'altro di

[1] Strab. III 168-169: ἐπεί πλήθει γε οὐδεμιᾶς ἂν ἀπολείπεσθαι δόξειε τῶν ἔξω Ῥώμης πόλεων. ἤκουσα γοῦν ἐν μιᾷ τῶν καθ' ἡμᾶς τιμήσεων πεντακοσίους ἄνδρας τιμηθέντας ἱππικοὺς Γαδιτανούς, ὅσους οὐδένας οὐδὲ τῶν Ἰταλιωτῶν πλὴν τῶν Πατουίνων.

[2] La tradizione letteraria è raccolta nell' articolo citato *Hispania* del De Ruggiero p. 781 sgg.

[3] Strab. III 148: ἐν δὲ καὶ Καστλῶνι καὶ ἄλλοις τόποις ἴδιόν ἐστι μέταλλον ὀρυκτοῦ μολύβδου..... οὐ πολὺ δ' ἄπωθεν τοῦ Καστλῶνος ἔστι καὶ τὸ ὄρος ἐξ οὗ ῥεῖν φασι τὸν Βαῖτιν, ὃ καλοῦσιν Ἀργυροῦν διὰ τὰ ἀργυρεῖα τὰ ἐν αὐτῷ.

[4] Nell'art. cit. del De Ruggiero p. 782 sgg.

Digitized by Google

Strabone, che lo localizza nel territorio di Castulo. È molto probabile che anche il monte argentifero per Avieno, nelle vicinanze di Nova Carthago, e quello di Ilucro della sopra detta epigrafe siano il medesimo di quello castulonese[1].

La espressione di *argentum oscense*, che troviamo nella tradizione storica, potrebbe far credere ad un' industria argentifera nella Iberia settentrionale assai prima che nella Betica e nella Iberia castulonese. Livio accenna a tale argento *oscense* in tre punti, e ogni volta lo contrappone all' argento naturale *infectum* ed a quello monetato romano *bigatum*[2]. Dal racconto dello storico è chiaro che non si tratta né di argento di miniera né di argento monetato; e l' antitesi sarebbe sufficiente per farci escludere che col determinativo di *oscense* si voglia significare una fonte argentifera in Osca, donde l' argento cosí chiamato[3]. D'altra parte però non potrebbe assolutamente escludersi che con *oscense* sí volesse significare del minerale greggio, quando si rifletta che piú d' una volta si fa ricordo nell' antichitá di miniere lungo la valle dell' Ebro. Catone[4] con molta precisione accenna a *fodinae argenti* nella regione traversata dall' Ebro, e Livio[5] parla di *ferrariae* e *argentariae* nel territorio dei Bergistani, popolazione che abitava nel nord-est della provincia. Potrebbe pertanto riferirsi l'appellativo *oscense* alle *fodinae*, che di fatto esistevano in questa parte dell' Iberia, anche se nella zona di Osca non si abbia notizie di cave di tale metallo[6]. Ma il si-

[1] Per l' identificazione di *Ilucro* si veda *Revue Archéol.* 1907 p. 54.

[2] XXXIV 10, 4: *argenti infecti tulit in aerarium decem quattuor milia pondo septingenta triginta duo et signati bigatorum septendecim milia viginti tres et oscensis argenti undeviginti milia quadringentos undequadraginta.* Cfr. 7; 46, 2.

[3] Sulla questione si veda FERTIG *Spanien Lande und Leute* p. 11 n. 2 e HÜBNER *Monum. linguae ibericae*-nummi p. 5.

[4] In GELLIO II 22, 29.

[5] XXXIV 21, 7. Tanto Livio quanto Catone adoprano unite le espressioni *ferrariae* e *argentariae; ferrareae* e *argenti fodinae.*

[6] Non sarebbe il caso di estendere l' espressione di *argentum oscense* all' argento che si trovava anche nella parte nord-ovest della Iberia, come nei Cantabri e negli Artabri (PL. *n. h.* XXXIV 138 e POSID. in STRAB. III 147).

Digitized by Google

lenzio che avvolge per tutta l'antichitá l'esistenza di tali miniere, mentre dai geografi si fa menzione di qualsiasi cava metallifera, della quale era ricca la Spagna, non c'induce a ritener probabile l'ipotesi che apparirebbe seducente. Né poi crediamo che la parola voglia denotare un'industria metallurgica, della quale sarebbe stato centro Osca. L'esistenza di una tale metallurgia fin dagli inizi del secolo II a. C., ed altrimenti la cessazione di una tale industria proprio quando cominciava a sorgere e fiorire altrove, sono due fatti che ci fanno essere molto perplessi nel ritenere Osca centro industriale prima della romanizzazione della regione. Non si può nascondere che, se Osca realmente avesse avuto la lavorazione metallurgica della Iberia settentrionale, non sarebbe stata tagliata fuori dalla via Augusta, che collegava direttamente i varii capiluoghi del commercio e dell'industria della penisola. Piuttosto, come è stato osservato[1], si può riferire il determinativo *oscense* all'argento *signatum* dagl'Iberi, cioè al metallo che con l'impressione di alcuni segni ed anche leggende nazionali servì come moneta, distinto naturalmente dal greggio perché non piú informe, e dal monetato romano perché non coniato.

Del resto le piú antiche informazioni sulle miniere argentifere si riferiscono all'Iberia centrale e il tratto della via Augusta, che traversava la regione castulonese, continuando la linea del Baetis, fu una costruzione in sostanza dovuta a interessi industriali, quando le nuove cave metallifere fecero spostare la via dalla costa all'interno, cioè da Nova Carthago dove giá da tempo si sfruttavano le cave argentifere, alla zona più ricca del prezioso metallo di Castulo. Pertanto lo studio della ricchezza pubblica e privata della Iberia ci fa concludere che, come avvenne per la via nella parte meridionale, avrebbe dovuto accadere al tronco Valenza-Barcino. Invece si modificò la sezione in quanto si uní Barcino a Caesaraugusta, ma la sezione ultima della via rimase inalterata, quale era stata nei suoi inizi, cioè nel III secolo a. C., forse perché fu suf-

[1] Dall'Hübner op. e pag. cit.

Digitized by Google

ficiente comprendere nella grande arteria soltanto Caesaraugusta, né si andò oltre a nord; escludendo in conseguenza Osca. Cosí, pur convergendo in Caesaraugusta le ricchezze minerarie del nord, da Asturica, rimase la Betica, e propriamente la sua parte settentrionale, il grande bacino industriale metallifero dell' Iberia, dovuto esclusivamente all' attività dei Romani coi quali è legato, in realtá, il fiorire dell' industria e del commercio del metallo nella Spagna.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 2.

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI

Piazza dei Cavalieri 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

II.

GIULIO BUONAMICI

LA QUESTIONE ETRUSCA

IMPORTANZA, NATURA E METODO DELLA ETRUSCOLOGIA

PROLUSIONE

AL CORSO DI ETRUSCOLOGIA

LETTA NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA IL 24 FEBBRAIO 1920

Digitized by Google

Digitized by Google

Sembra proprio che un fato o destino crudele si sia aggravato da molti secoli sul *nome etrusco*. Già le tradizioni medesime di questo popolo misterioso portavano che gli Dei avevano concesso all'esistenza della nazione tirrena 10 periodi, o « *Saecula* », contrassegnati al loro inizio da speciali prodigi, trascorsi i quali sarebbe stata la fine dell'Etruria: *finem fore nominis Etrusci.*[1] L'oracolo si verificò alla lettera: gli Etruschi furono vinti e domati da Roma, nella cui compagine sociale venne quasi ad assorbirsi tutto quello che di più intimo possedevano: lingua, costumi, religione, arte, scienza.

Fata premebant Etruscos! Ma la sorte non si contentò di perse guitarli finchè conservarono una qualche apparenza di vitalità, di nazione... continuò ad infierire anche dopo la loro completa rovina, e pur contro le opere di quelli che, in un modo o nell'altro, pretesero di sollevare il velo dell'oblio, distesovi dalla superbia e dall'ingratitudine dei Quiriti. Un imperatore etruscofilo, Claudio, compose, a detta di

[1] CENSORINO, *De die natali*, c. 17, sulla fede di Varrone.

Digitized by Google

Svetonio, 20 libri di *antichità Tirrene,* libri che si leggevano poi in Alessandria, e nei quali stava raccolto il frutto delle indagini, che per lunghi anni aveva diligentemente proseguite il dotto Cesare.

Di questi libri non è giunto fino a noi il più piccolo frammento; e son perdute le opere di Varrone e di tanti altri, che avevano scritto sul medesimo tema.

La lingua etrusca si parlava e si scriveva fino al I secolo di Cristo: si hanno ancora iscrizioni di quest'epoca. Ma la conoscenza di essa dovette prolungarsi anche molto dopo. Giuliano l'Apostata aveva al suo seguito aruspici etruschi, che si servivano dei loro libri rituali.[1] Ai tempi di Onorio, dei sacerdoti venuti dall'Etruria a Roma, nel 408, si vantavano di aver preservato una città dall'invasione di Attila, per mezzo di fulmini evocati secondo i riti e gli scongiuri dei loro antenati;[2] e durante l'invasione di Alarico i maghi etruschi proposero al Vescovo di Roma di tentare per la città eterna quello che era riuscito ad essi per Narni: Zosimo pretende anzi che il Papa stava quasi per permetterlo, quando l'indignazione pubblica dei Cristiani lo indusse ad opporre un rifiuto. Nei dizionari di Papia e di Suida si trovano delle notizie e delle parole etrusche, le quali dimostrano che fino ai tempi in cui vissero questi scrittori, esistevano sempre almeno dei brani di autori classici oggi perduti, dove si contenevano informazioni riguardanti la storia, la lingua, la coltura dei Tirreni. Papia vi-

[1] Si ricordi, per es. la spedizione di Giuliano contro i Persiani, prima della quale gli aruspici toscani lo sconsigliarono dall'impresa, allegando i segni funesti interpretati secondo i *libri delle cose divine* di Tarquinio, che avrebbero pure mostrato all'imperatore.

[2] Zosimo, *Hist. rom.,* l. V, capo XLI. Cfr. Mirville, *Pneumatologie,* Paris, De Surcy, 1863, tomo III, p. 425.

Digitized by Google

veva circa nel 1053 dell'Era nostra, e Suida sotto Alessio Comneno.

Poi, più nulla! E bisogna superare un periodo di circa 400 anni per giungere alle finzioni di Annio, le quali, ad ogni modo, rappresentano un primo tentativo per sollevare un velo del mistero. Dalle sudate elucubrazioni del monaco di Viterbo dipende la passione per le ricerche etruscologiche dei dotti Toscani del '500; e in epoca più recente — quasi a reazione — la poderosa opera del Dempster, *De Etruria regali,* in cui si veniva a porre « nelle linee generali il tormentoso problema ».[1] Il potente entusiasmo sollevato in Firenze da quest'opera produsse quella *etruscheria,* come fu chiamata, a cui si debbono le assennate *Aggiunte* del Buonarroti; i pregevoli studi del Gori, del Guarnacci, del Maffei, del Lami, degli Accademici di Cortona, e di tanti altri, che alla loro volta dettero occasione al celebre *Saggio* del Lanzi, degno di considerarsi — secondo Ennio Quirino Visconti — come « assolutamente il miglior libro » scritto sull'argomento.

Non è questo il luogo opportuno per tessere, sia pur brevemente, la storia dei tentativi compiuti per oltre 4 secoli da illustri ingegni, per decifrare la lingua delle iscrizioni etrusche, le quali a poco a poco sono state scoperte fino a formare il numero di circa 8500. Basti ricordare che per conseguir lo scopo furono adibiti in soccorso, con metodo più o meno scientifico, quasi tutti i principali linguaggi del mondo, dall'ebraico all'egizio, dal greco al latino, dal celtico all'armeno, dal basco all'albanese, dal turco-tartaro al caucasico. Ma tutto fin qui è stato inutile: l'Etrusco ha

[1] NOGARA, *L'Abate Luigi Lanzi e l'opera sua* ecc. Dissertaz. Pontif. Accad. Rom. di Archeol. 1 Dicembre 1910, p. 8.

Digitized by Google

resistito alle più geniali ipotesi, alle più sagaci congetture, ai più costanti sforzi del Deecke, del Pauli, del Bugge, del Torp; ai 25 anni di studio del Martha, e forse ai 50 e più del nostro Lattes. *Etrusca sunt, non leguntur.*

Così è avvenuto anche per le ricerche sull'origine e la razza dei Tirreni, sebbene, come scriveva il Martha, non vi sia forse regione del Mondo Antico, e potrei anche aggiungere — dopo i tentativi del Cruel e dello Sten Konow — il Mondo Nuovo e il Nuovissimo, in cui non si sia cercato da qualcuno la culla della nazione etrusca.

Fino nelle più piccole coincidenze si è dimostrata l'avversità della sorte: l'immagine del capo dei *Turša,* che da molti si ritengono come i progenitori dei *Tusci,* è rimasta nei bassorilievi egiziani rappresentanti i prigionieri di Ramesse III,[1] danneggiata per modo, che non se ne possono riconoscere chiaramente i tratti.

Tutto dunque rimane un mistero per questo popolo misterioso: lingua, origine, razza.

Fata premebant Etruscos!

E sarà sempre così?

Gli antichi Etruschi, che erano fatalisti, e persuasi della verità dei loro oracoli, e che videro compiersi esattamente il proprio destino, avevano forse ragione di rassegnarsi alla sorte: ma possiamo rassegnarci anche noi, dopo aver confessato: *ignoramus,* a ripetere sempre: *ignorabimus?*

Io affermo risolutamente di no, ed aggiungo pure che sarebbe vergogna una tale rassegnazione. Questo mistero abbiamo *noi* il dovere di decifrarlo, noi, che più di ogni altro popolo abbiamo ereditato i più preziosi germi della civiltà tirrena.

[1] Vedi: *Revue arch.* 1867. *Extrait d'un Mémoire sur les attaques dirigées contre l'Egypte par les peuples de la Mediterranée,* ecc. p. 94.

Digitized by Google

Non potendo tracciare adesso, neanche a grandi tratti, il quadro di questa civiltà, mi propongo di toccar brevemente delle ragioni che hanno gli Italiani di studiare amorosamente, non solo la lingua — che sarebbe un motivo troppo particolare e insufficiente, date le cognizioni che ora si possiedono — ma la storia, l'arte, la religione, i costumi; in una parola, tutte le più vitali manifestazioni del genio etrusco.

* * *

Cominciamo dalla storia. Io credo che non si possano scrivere le prime pagine della storia di Roma, che è poi la storia dell'Italia — e perchè non dico del mondo civile? — senza ricostruire in qualche modo quella delle origini etrusche. Per quanto i Romani, spinti da gelosa ingratitudine, cercassero con ogni mezzo di seppellire nell'oblio ogni traccia della soggiogata nazione, tuttavia non han potuto a meno in certe circostanze — loro malgrado — di confessare, almeno indirettamente, che molto dovevano agli *obesi* e *pingui* Etruschi, come li qualificavano per bocca dei loro poeti.

La stessa fondazione di Roma, comunque voglia concepirsi, al lume della critica storica, ci vien rappresentata dalle antiche leggende e tradizioni principalmente come un effetto del concorso di due delle più potenti lucumonie dell'Etruria. *Cere* e *Veio,* nel cui territorio fu compreso successivamente il *Settimonzio,* contribuirono colla loro reciproca gelosia all'affermarsi e al rafforzarsi di Roma. Nè mancano indizi di una estesa dominazione etrusca sul Lazio, prima che i Quiriti portassero le loro aquile alla conquista dei popoli vicini. Questi indizi furono già raccolti e discussi

Digitized by Google

con genialità dall'Orioli, e recentemente considerati ancora da altri.[1] I nomi delle più antiche tribù romane: *Ramnes, Tities* e *Luceres* erano ritenuti più antichi di Roma da Volnio, antico scrittore di tragedie etrusche;[2] e così, dopo l'Orioli,[3] hanno pensato molti etruscologi contemporanei:[4] nè manca di un profondo significato, a questo proposito, l'esistenza a Roma di un *vicus tuscus*.

Non mi sfugge però che alcuni ipercritici, troppo ligi all'autorità del Mommsen e della sua scuola, negano ogni valore alle tradizioni e alle leggende, che cercano di spiegare secondo certi loro canoni più o meno preconcetti, dimentichi della lezione che le scoperte del Foro, per tacere di altre,[5] hanno dato ai denigratori stranieri delle antiche glorie d'Italia. Non mi sfugge nemmeno che essi vorrebbero comodamente sopprimere due o tre secoli dell'antica storia di Roma, e che quindi, per loro, parlare di influsso etrusco sui primordi di questa, equivale ad una aberrazione di spiriti arretrati. Ma prescindendo dalla controcritica che potrebbe farsi — ed è stata fatta — del loro scetticismo, resta sempre di argomento validissimo, per me, la testimonianza degli stessi Romani, i quali, nella loro alterezza, non si sarebbero mai abbassati a riconoscere la potenza e il dominio etrusco, come anteriore alle origini della città eterna, se non avessero avuto di tal fatto prove evidentis-

[1] Cfr. PARETI, *Pelasgica,* in Riv. di Filol. classica, 1918, p. 326.

[2] VARRO, *De lingua lat.*, V, 55.

[3] *Il Settimonzio,* p. 249.

[4] KÖRTE, SKUTSCH, ecc.

[5] Non ignoro quanto in proposito scriveva il PAIS nel 1910 (*Per la storia della Regia e del Foro Romano,* in Rend. Acc. Lincei, s. V, vol. XIX, 1910, p. 213 seg.); ma non per questo ric onosco la necessità di modificare il mio giudizio.

Digitized by Google

sime e impossibili a revocarsi in dubbio, o a passare sotto silenzio.

Che cosa significa, infatti, la frase di Cicerone[1] che: *Romuli aetátem iam inveteratis literis atque doctrinis fuisse cernimus?* Gli ipercritici, lo so bene, risponderebbero che i classici han tramandato quelle notizie riferendosi alla dominazione dei Tarquini, dei quali era nota l'origine etrusca, e negherebbero quindi che tali notizie possano estendersi al periodo preromuleo; ma io mi servo di un argomento *ad hominem* e replico che — *secondo essi* — neppure la dominazione dei Tarquini ha valore storico: come possono dunque gli annalisti romani avere attinto a fonti di quell'epoca? Che se infine si volesse riportare l'origine di dette notizie soltanto al III o IV secolo a. C., dov'era allora la potenza etrusca da ispirare ai Romani il desiderio di gloriarsi d'aver ricevuto il proprio incremento da un popolo caduto così in basso, e che si doveva annientare a qualunque costo?

Tant'è: io sono convinto che la storia di Roma è la continuazione di quella etrusca, colla quale solo, per conseguenza, viene a completarsi la storia della gente italica.

* * *

Ma la storia politica di un popolo non può esser disgiunta da quella della civiltà e dell'arte. Ora l'arte e la civiltà dell'Etruria esercitarono pure un influsso notevole sulla Roma nascente. Dubitò il Mommsen dell'origine etrusca attribuita alle insegne e alle pompe ufficiali romane; ma

[1] *De Legibus.*

Digitized by Google

oggi, come nota il Lattes,[1] tutti riconoscono [2] « che il grande storico eccedette nell'antipatica indifferenza contro la memoria e l'opera degli Etruschi ». E giustamente il Modestov, nella sua classica *Introduzione alla Storia Romana,* protestava contro questo sdegno, « davanti al quale lo storico contemporaneo resta confuso », chiamandolo il secondo errore del Mommsen sulla preistoria della nostra penisola.[3] L'archeologo De Marchi, per citarne uno, si è dichiarato sempre « credente convinto e impenitente in una larga influenza che l'Etruria avrebbe esercitato sulla civiltà romana »:[4] e molte sono le istituzioni per le quali si può riconoscere e anche dimostrare un tale influsso. Mi contento per ora di qualche esempio.

È nota l'importanza che presso gli Etruschi ebbe il sistema della *limitazione,* di cui essi attribuivano l'origine agli Dei. Ora il Thulin[5] ha fatto vedere come la voce *gruma,* derivante per lo Schulze dal greco γνῶμα secondo le leggi fonetiche etrusche, non già secondo quelle latine, confermi la notizia di Varrone: *limitum prima origo.... a disciplina etrusca,* e ci insegni che « i Romani ricevettero l'arte dei gromatici non direttamente dai Greci, ma dagli Etruschi ».

Anche la divisione del tempo dovette, almeno per un determinato periodo, essere comune ai due popoli, poichè il Boll[6] riconosceva conforme ai resultati ottenuti dallo Schulze

[1] *A che punto siamo colla questione etrusca?* in *Atene e Roma* XIII, Luglio-Agosto, n. 139-140, col. 21, seg. § 9.

[2] Cfr. HERBIG, *Allgem. Zeit.* 1907, num. 92 seg., pag. 3.

[3] Il primo, secondo Modestov, è l'aver disconosciuto che in Italia vi sono resti di popolazioni preistoriche.

[4] Cfr. « Il *Rex* nella stela arcaica del Comizio », Rend. Ist. Lombar. s. II, vol. XXXIII, 1900.

[5] *Disciplina etrusca*, in *Enc.* PAULY-WISSOWA, trad. PONTRANDOLFI, p. 90.

[6] *Berlin. Philol. Woch.*, 1908, col. 1378.

Digitized by Google

la congettura che fosse « ein etrusckischer Kalender die Vorlage des römischen ».

E giacchè ho parlato di divisioni, dal momento che il principio duodecimale non solo dominava i computi del tempo, ma ancora i calcoli relativi ai pesi e alle misure, si potrebbe domandarci se l'*asse* e la *libbra,* divisi in 12 oncie, con nomi speciali per ciascun dodicesimo, non abbiano rapporto, al pari della *dozzina* e della *serqua* toscana, col sistema numerario etrusco, molto più che il Lattes ritiene dimostrato da « preciso documento » che il sistema librale « fu dagli Etruschi, o da gente di lor famiglia, introdotto in Sicilia »,[1] essendo identica la libbra di Siracusa coll'etrusca, sebbene entrambe fossero pari a due terzi di quella di Roma.

Che se alcuno obiettasse il silenzio degli scrittori romani intorno a certi influssi, rispondo che si può bene spiegarlo osservando col Lattes,[2] che « nei tempi, nei quali le tradizioni circa la provenienza degli usi ed istituti di Roma antica si formularono per iscritto, mentr'era di moda rannodare ogni bella e buona cosa alla Grecia, era l'Etruria caduta sì basso, che dell'etrusca origine doveasi sentire umiliazione piuttosto che gloria, sicchè torna probabile che di qualche uso od istituto romano siasi taciuta l'origine tosca, ma non già che siasi essa falsamente senza necessità ed evidenza affermata ». Questo forse, per citare un esempio, è il caso delle XII Tavole, in cui si vollero vedere analogie col sistema legislativo ellenico, mentre vi si riscontrano elementi affatto diversi, ed anche contrari a quello, e che non si possono neppure spiegare colle particolari consuetudini e col carattere delle romane istituzioni.

[1] *Iscriz. paleol.*, p. 102.

[2] *A che punto siamo,* ecc. col. 214. Cfr. *Saggi ed Appunti,* p. 179.

Digitized by Google

Ma, dopo tutto, non mancano, nella stessa tradizione romana, indizi eloquenti della parte che ebbero gli Etruschi nello svolgimento della civiltà italica. Abbiamo già ricordato come le leggende lascino travedere l'antica dominazione dell'Etruria sul Lazio, e l'ingerenza di essa sulle prime vicende di Roma. Posto ciò, è naturale che si dovesse ammettere, come risultato, la derivazione di certe costumanze etrusche presso i Quiriti. E di fatti, sono proprio i Romani ad attestarci che dall'Etruria appresero la *bolla d'oro,* segno di nobiltà, i fasci consolari, i littori, la pretesta, la toga, la sedia curule, la clamide dei trionfatori, gli anelli dei cavalieri, i calzari senatorî e guerreschi, le corone trionfali, i giuochi, le cerimonie dei *feciali,* e molte altre cose; sicchè Ottofredo Müller non aveva torto quando pretendeva di ricavare le istituzioni civili dell'Etruria da quelle di Roma, argomentando che questa le traesse da quella.[1] Ed io aggiungo, tra parentesi, che non c'è bisogno d'esser dotati di spirito profetico per supporre che un giorno, quando si potranno decifrare un po' meglio i testi etruschi fino ad ora posseduti, e quando se ne saranno scoperti dei nuovi, sarà facile vedere quanta parte il sistema legislativo dell'Etruria ha esercitato sull'ordinamento politico e sociale di Roma, e sulla costituzione di quel *Diritto,* che ha servito poi di base ad ogni regime di popolo civile.[2]

Le testimonianze, a cui sopra ho accennato, si può credere che vengano riassunte e comprovate da Tito Livio,[3]

[1] Cfr. MARINI, *Istoria universale riordinata.* Lucca, Giusti, 1843, vol. II, p. 172.

[2] Cfr. BONFANTE, *Storia del Diritto Romano,* 2.ª ediz. rived. ed ampliata. Milano, Soc. ed. libr. Piccola bibliot. scient., n. 9, 1908, p. 203 seg. e specialmente p. 205. Cfr. pure p. 145.

[3] L. IX, cap. 25.

Digitized by Google

il quale dopo aver detto che Marco Fabio, fratello del console, era stato educato a Cere, e conosceva benissimo la lingua etrusca: *Caere educatus apud hospites, etruscis inde litteris eruditus erat, linguamque etruscam probe noverat,* aggiunge sull'autorità di alcuni scrittori, che i giovani romani si mandavano un tempo in Etruria ad apprendervi le lettere, come poi in Grecia: *habeo auctores vulgo tum romanos pueros sicut nunc graecis ita etruscis litteris eruditi solitos.*

Catone pure sembra attestarci che i Romani più antichi imparavano dagli Etruschi, mentre i più moderni si eran volti alle favole e agli errori dei Greci, che gli Etruschi sempre ebbero in odio; ed a ciò egli attribuiva la decadenza di Roma: *Roma rudis erat cum, relictis libris et disciplinis hetruscis, graecis fabulis rerum et disciplinarum erroribus ligaretur, quas ipsi Hetrusci semper horruerunt.*[1] Ora Catone rappresentava il partito conservatore, di fronte ai fautori delle innovazioni dovute all'influenza greca: se dunque egli loda le istituzioni etrusche, è questa una bella conferma del fatto che le prime istituzioni di Roma derivavano dall'Etruria. Ed è poi noto che il Senato fece ricorso più volte al parere degli aruspici toscani in tempi calamitosi per la Repubblica.

Non sempre dunque, e non tutti i Romani si vergognarono di riconoscersi discepoli degli Etruschi; molti invece si gloriavano di discendere da essi per mezzo del leggendario *Latino,* figlio di *Cateto* Tirreno, secondo Alessandro Polistore e Aristide Milesio. Il maggior titolo di nobiltà pei Romani era quello di poter vantare la propria origine da antiche famiglie etrusche: ne fa prova, oltre Persio e Properzio, anche Orazio parlando dell'aretino *Maecenas, atavis editus regibus.* Con altrettanta ragione, sebbene ad altro pro-

[1] Cfr. Marini, l. c. II, p. 174 seg.

Digitized by Google

posito potè dire Cesare Correnti a Vittorio Emanuele II che *le reliquie etrusche sono il più antico diploma storico, il più antico documento della nobiltà civile d' Italia!*

Ma quando pur mancasse ogni altro indizio, ogni altra testimonianza, basterebbe la concorde affermazione degli stessi classici sul dominio etrusco diffuso un tempo su quasi tutta l' Italia. Alle parole di Catone:[1] « *in Tuscorum iure paene omnis Italia fuerat* », e di Livio:[2] « *Tuscorum ante romanum imperium late terra marique opes patuere* », fece eco Servio scrivendo:[3] « *Tuscos autem paene omnem Italiam subiugasse manifestum est* ».

E comunque si voglia pensare con alcuni moderni sul vero significato di queste notizie, sull'epoca precisa di tal dominio, e sulla distinzione, più o meno fondata, che si vorrebbe mantenere ancora fra *Tirreni* ed *Etruschi*,[4] non è possibile dubitare della realtà e dell'estensione della potenza di questi ultimi. Tradizioni, monumenti ed oggetti che spettano ad essi, sono stati ritrovati da Busca presso Saluzzo e da Matrey presso Innsbruck alla Campania e alla Calabria, e perfino in Sicilia, dove il Lattes ha scoperto alcune traccie epigrafiche;[5] e tuttociò conferma il detto di Plinio che quel popolo fu così grande e potente da riempire « non terras solum, sed mare etiam per totam Italiae longitudinem ab Alpibus usque ad fretum Siculum, fama nominis sui ».

[1] *Origin. Fragm.*, PETER; SERVIO, *ad Aen.* XI, 567.
[2] V, 33.
[3] *Ad Aen.*, X, 145.
[4] PARETI, RIBEZZO, ecc.
[5] *Rendic. Istit. Lombardo*, serie II, vol. XXXVII, 1904, p. 619 seg.

Digitized by Google

* * *

Quello che si è detto per le istituzioni politiche e civili, può ripetersi anche per le istituzioni religiose. I Romani medesimi confessavano di averle ricevute in gran parte dagli Etruschi, poichè leggiamo, tra gli altri, in Valerio Massimo:[1] « institutum est, sacra *caeremonias* vocari, quia Caeretani ea.... coluerunt »; e presso Paolo:[2] « Caerimoniarum causam alii ab oppido *Caere* dictum existimant »; opinione a cui non si dimostrava contrario neppure il Niebuhr.[3] E veramente gli Agillini, o Ceretani che dir si voglia, ebbero in Roma diritti antichissimi di *isopolitia,* sotto il nome di *ius Caeritum.*[4] Sebbene gli annalisti posteriori abbiano stimato provenire i privilegi e l'etimologia da gratitudine *pro sacris bello gallico receptis custoditisque,* e secondo Strabone per la preda ai Galli ritolta in un ultimo scontro a profitto dei Romani, il Niebuhr non amava riconoscerlo, parendogli più simile al vero che i Romani, anzi, in occasione dell'incendio Gallico, abbiano scelto Cere ad essere, come Livio la chiama,[5] *sacrarium populi romani, diversorium sacerdotum, ac romanorum sacrorum receptaculum,* appunto perchè Cere sola, signoreggiando in origine sul territorio ove poi sorse Roma, aveva comunicato a quest'ultima i semi dell'antichissima sua religione.[6]

[1] L. I, 10.

[2] Pag. 34.

[3] *H. R.,* vol. 2, p. 111.

[4] STRABONE, V, c. 2, § 3. GELLIO, XVI, 13, e specialm. lo Scoliaste Cruquiano in ORAZIO, *Epist.* I, 6, 63. Cfr. NIEBUHR, l. c. e ORIOLI, *Settimonzio,* p. 247.

[5] V, 40, 50.

[6] Cfr. ORIOLI, l. c., p. 247.

Digitized by Google

Il Collegio dei Salii, anche secondo le tradizioni, avrebbe avuto origine etrusca.[1] Il più antico elmo che si ritrova in Etruria, fu giustamente considerato dall'Helbig[2] come modello del copricapo dei Salii; e il Milani dimostrò[3] che i 12 scudi dei Salii corrispondevano ai 12 asterismi dello Zodiaco, e ai 12 Cureti etruschi, rappresentati come genî spirituali e terminali dell'anno solare nel presunto *lebete* della tomba vetuloniese degli Acquastrini.[4] E poichè ho ricordato anche sopra il principio duodecimale, su cui si fondava la numerazione degli Etruschi, principio che si ritiene derivato dalla Caldea, direttamente o indirettamente per mezzo degli Hittiti,[5] aggiungo ora che esso dominava pure in tutte le loro istituzioni sociali e religiose. Dodici erano gli Dei grandi da essi venerati, dodici le città principali nei tre centri del loro dominio in Italia, dodici i lucumoni, dodici i littori, dodici gli schemi fulgurali, ecc.

L'influsso etrusco sulla religione romana va notato ancora per ciò che riguarda l'aruspicina. Si sa l'importanza che ebbe il Collegio degli Aruspici in Roma, dove l'aruspicina fu accolta assai per tempo,[6] e unita coi riti augurali. Ma durante tutta l'epoca della Repubblica, gli aruspici non furono romani, bensì etruschi, che quando se ne presentava il bisogno, venivano chiamati dall'Etruria, e consultati in ogni più grave occasione. Cicerone ne fa testimonianza: *Prodigia portenta, ad Etruscos haruspices, si senatus iussit de-*

[1] Servio, in *Aen.* VIII, 285.

[2] *Sur les attributes des Saliens*, Mém. de l'Acad. des Inscr. XXXVII, 2, 1905, p. 236 seg.

[3] *Atti della soc. ital. per il progr. delle scienze*, 1908, p. 249.

[4] Cfr. *Studi e Materiali*, II, 88 seg.

[5] Cfr. Schmidt, *Die Urheimat der Indogermanen, und das Europäische Zahlsystem*. Berlin, 1890.

[6] Cfr. Lucano, I, 584, 617.

Digitized by Google

ferunto.[1] E da Tacito apprendiamo che Claudio, dopo avere ricordato al Senato che spesso in tempi gravi per la Repubblica, si erano interrogati gli aruspici, *quorum monitu redintegratas caerimonias, et in posterum rectius habitas,* avendo i più notevoli personaggi dell'Etruria, o di per sè stessi o per impulso del Senato romano, conservata e propagata nelle famiglie detta scienza,[2] suggeriva che questa antichissima disciplina italica non si lasciasse decadere, provocando a tale uopo un Senato-consulto: *ne vetustissima Italiae disciplina per desidiam exolesceret.*[3] E gli aruspici, come si è già notato, continuarono a consultarsi durante tutto l'Impero.

Nè soltanto furono accolte dai Romani molte istituzioni religiose, come l'*orientazione* dei templi, la purificazione dei luoghi sacri, l'evocazione e la espiazione dei fulmini, i riti funerari, ecc. ma passarono anche in parte, più o meno trasformate e adattate alle nuove credenze, nel Cristianesimo. Le diverse manifestazioni e personificazioni dei concetti dell'oltretomba — per non citare che un solo esempio — riappariscono e si affermano nel Medio-evo colle terrificanti scene delle regioni infernali, immortalate nel sacro poema dell'Alighieri. Gli orribili mostri del musaico della cupola di S. Giovanni di Firenze, dove sembra essersi sbizzarrita la fantasia dei nostri grandi artisti, richiamano assai da vicino le figure demoniache delle tombe tarquiniesi.

[1] *Leg.* II, 8. Cfr. *Har. resp.* IX, 18, 19, per la *disciplina Etruscorum.*

[2] *Primoresque Etruriae sponte, aut patrum Romanorum impulsu, retinuisse scientiam, et in familias propagasse.*

[3] *Annali,* XI, 14.

Digitized by Google

* * *

Dalle istituzioni religiose è facile il passaggio a trattare dell'arte, poichè questa serviva principalmente per adornare i templi; ed i suoi prodotti più eccellenti venivano deposti nelle tombe, come pietosa e memore testimonianza di affetto verso gli estinti.

Intorno all' arte etrusca si sono dati in ogni tempo dei giudizi assai disparati, e talora contradittori, non solo riguardo alle sue fonti ed origini, ma ancora alla sua intima natura e al suo giusto valore. Chi la derivò dall'Egitto,[1] chi esclusivamente dalla Grecia,[2] chi la ritenne prodotto originale del genio etrusco,[3] chi infine come il risultato di successive o simultanee imitazioni da modelli diversi,[4] fatte senza gusto e senz'ordine, in modo da riuscire ad un informe accozzo di elementi disparatissimi.

Non essendo qui il luogo opportuno per trattare una così *vexata quaestio,* mi limiterò per il momento ad osservare quanto fa al caso nostro, che sebbene le più recenti indagini sembrino, ad alcuni, ritardare dopo l'età regia la copertura della *cloaca massima,*[5] e li inducano a considerare, col Ricci,[6] la volta della *Porta all' arco* in Volterra come derivante da una posteriore ricostruzione romana, non si possono mettere in dubbio le testimonianze degli stessi scrit-

[1] Buonarroti, Heyne.
[2] Körte, ecc.
[3] Bartelemy, Magni.
[4] Winckelmann, ecc.
[5] Körte, *Etrusker,* trad. ital., p. 67.
[6] *Volterra,* p. 12.

Digitized by Google

tori classici, i quali esplicitamente riconoscevano che i primordi dell'arte presso i Romani furon dovuti all'azione esercitata dall'Etruria. I due Tarquinî, secondo Livio,[1] avrebbero chiamato artefici etruschi per costruire il tempio di Giove Tarpeio, e altri pubblici edifizi. Secondo Varrone e Diodoro,[2] il portico delle case romane era una invenzione dei Tirreni d'Adria. Plinio parla di pitture etrusche anteriori a Roma,[3] e in particolare ne ricorda alcune antichissime a Cere, che esistevano fino ai suoi tempi. Il Körte medesimo, sebbene accetti i severi giudizi del Müller sull'arte degli Etruschi,[4] pure non teme di affermare[5] che essi insegnarono agli abitatori dell'Italia centrale la costruzione di solide case in pietra, il sistema della *limitazione,* la fondazione delle città secondo un piano determinato, la lastricazione delle strade, lo scolo delle acque, e tante altre cose che già il Dempster aveva notate nella sua classica opera, benchè, esagerando, desse motivo di dire al Maffei che « per poco non attribuì agli Etruschi d'avere inventato a respirare ».

Il Nogara in una brillante conferenza[6] sull'influsso esercitato dalla civiltà dell'Etruria sui Romani, ha mostrato con esempi opportuni e concludenti come l'arte primitiva di Roma si sia svolta sotto l'azione dell'arte etrusca; ed ha richiamato l'attenzione su certi « motivi », che ricompariscono fino al Medioevo.[7] Basta, egli dice, percorrere l'opera

[1] I, 56.
[2] Varrone, l. IV, 33; Diodoro, V, 40; Festo, s. v. *Atrium.*
[3] L. XXXV, cap. 3.
[4] L. c., p. 64.
[5] Pag. 80.
[6] *Boll. Ass. Archeol. Rom.* 1915, n. 1-5, pag. 9 seg.
[7] Pag. 32 seg.

Digitized by Google

del Rivoira sulle origini dell' architettura lombarda,[1] per vedere, e direi quasi toccar con mano, come interi organismi architettonici, e molti particolari ornamentali, che comunemente si facevano derivare dalla Grecia e dall' Oriente bizantino, non sono altro che la ripresa e l'applicazione di tipi e di motivi conservati qua e là nei monumenti etruschi. E cita in prova il cippo di Settimello Fiorentino, grande cono schiacciato sorretto da un piedistallo quadrangolare, agli spigoli del quale sono addossati quattro mostri ritti sulle zampe posteriori e colla testa rovesciata all'indietro sul dorso.[2]

Il *motivo* si ripete nei capitelli delle architetture lombarde, per esempio nel fascio di colonne a destra della porta maggiore di S. Ambrogio di Milano, dove due mostri a foggia di capre abbracciano colle zampe una colonnina: uno dei mostri ha la testa ritorta indietro sul dorso. Altro esempio luminoso dell'influsso etrusco, secondo il Nogara, si può riconoscere nei mostri *stilofori,* destinati a sorreggere i portali delle basiliche, o le pile dell' acqua santa. Ricordiamo il leone di Valle Vidone presso Toscanella, posto a guardia di una tomba del VI secolo,[3] quelli della Grotta *Campana* di Veio[4] e di altre tombe, i quali hanno riscontro col leoncino stiloforo del 1032, appartenente a S. Flaviano di Montefiascone. La somiglianza si ritrova anche nei particolari dell'esecuzione, specialmente nella forma delle giubbe e delle criniere, fatte a foggia di foglie uncinate in punta. Molti di questi tipi si posson vedere ancora nelle nostre

[1] *Le origini dell' Architettura e delle sue principali derivazioni dai passi d' Oltralpe.*

[2] *Sec.* VI a. C.

[3] Museo di Firenze. MILANI, *Guida,* vol. II, t. CXXV.

[4] DENNIS, 3.ª ediz., vol. I, 33.

Digitized by Google

cattedrali toscane: e interessantissimo a questo riguardo è il pulpito del Duomo di Volterra. Quivi, fra gli altri, si nota un particolar motivo, che offre corrispondenze coi monumenti etruschi, cioè una donna che viene afferrata da un mostro. Essa ha i capelli divisi in due ciocche, simili a quelle di una figura scolpita sopra un'urna conservata nel Museo Guarnacci, che venne poi adibita anche in epoca cristiana.[1] Tale acconciatura si vede pure in molte teste delle urne volterrane.

Altri esempi notevoli di mostri *stilofori* si possono riconoscere nel pulpito di S. Bartolommeo di Pistoia; e più ancora in quello della Chiesa di Groppolo del 1193, dove uno dei leoni ha afferrato un uomo così brutto, che sembra essere un diavolo,[2] e può mettersi in rapporto col mostro semiumano del pulpito già ricordato di Volterra, e con altri simili, dei quali S. Bernardo si lagnava che deturpassero le chiese Cristiane nei lavori dei Maestri Comacini.

Nè voglio dimenticare, per confronto, il pulpito del Duomo di Prato, opera di Rosellino e di Mino da Fiesole, del 1473. Sopra uno zoccolo largo 80 centimetri appena, posano quattro sfingi alate,[3] che sorreggono una colonna quadrata di più di un metro. Queste sfingi hanno la testa di donna, le ali di tipo assiro, code attorcigliate di serpente, zampe ferine. Sono da citarsi a questo proposito le sfingi in pietra di Poggio Gaiella di tipo simile, già appartenenti

[1] Pel significato di queste figure mostruose e semiumane, e per la loro continuazione nel Medioevo, vedi DUCATI, *Esegesi di alcune urne etrusche*, in Rendic. Acc. Lincei, serie V, vol. XIX, 1910, p. 174 seg. Cfr. VENTURI, *Storia dell'Arte Italiana*, III, fig. 225, 398, ecc.

[2] BELLE, *Le piccole città e la grande arte in Toscana*, Tour du Monde, 1879, 2.° sem., p. 238, 39.

[3] Cfr. BELLE, l. c. p. 232.

Digitized by Google

al Museo Casuccini,[1] che secondo il Dennis offrono spiccate analogie con quelle dei rilievi del tempio dorico di Assos, ora nel Museo del Louvre;[2] la sfinge alata dipinta nella tomba *Campana* di Veio,[3] quella della tomba delle *Lastre dipinte* di Cere;[4] quella in bronzo con *tutulus* del Museo di Perugia,[5] quelle di Norchia,[6] della *cuccumella* di Vulci,[7] ecc.

Serve anche per i confronti un particolare *tipo* di capitello che si trova a Vulci, a Sovana, e altrove. A Tuscania questo capitello singolare[8] di una colonna composita di *peperino,* porta in mezzo alle volute una testa maschile e femminile alternativamente nelle quattro faccie; e dal berretto frigio posto sulla testa dell'uomo, la colonna è stata chiamata *di Paride e di Elena.*[9] Capitelli simili si trovano in altre parti d'Italia.[10] Anche nelle colonne che sorreggono il pulpito di S. Bartolommeo in Pantano di Pistoia[11] si vedono dei capitelli con faccie umane in mezzo alle volute, che offrono rassomiglianze, come profilo, con quelli di ordine dorico.

[1] Una è riprodotta in DENNIS, II, 352.

[2] Cfr. TEXIER, *Asie Mineure,* p. 204; cfr. Mon. Inst. III, tav. 34.

[3] DENNIS, I, 35; cfr. p. 37.

[4] Ibid. I, 257.

[5] Ibid. II, 426.

[6] Ibid. I, 204. Annali, 1833, 29; 1832, p. 295.

[7] In pietra. DENNIS, II, 453; MICALI, *St. degli ant. pop. ital.,* 148. Per le sfingi alate di Chiusi vedi DENNIS, II, 300; e pag. 301 per quelle in rilievo pure di Chiusi.

[8] DENNIS, I, 481.

[9] Vedi riproduzione in DENNIS, l. c.

[10] Per es. a Salerno, Cora ecc. Uno si trova nel Museo di Berlino. Bull. Ist. 1830, p. 136. Mon. ined. Inst. II, tav. 20. Per quello della tomba dipinta di Vulci vedi DENNIS, I, 466; cfr. p. 448. Per quello scoperto da Ainsley a Sovana vedi p. 512, e II, 10. Frammenti di capitelli simili si hanno a Roma e a Pompei.

[11] Anno 1250. BELLE, l. c. p. 237, 238.

Digitized by Google

E sempre riferendomi ai pulpiti delle nostre cattedrali, ricorderò il fatto, già notato da altri, che i gruppi, rappresentati nei bassorilievi, sono rinchiusi spesso in reparti rettangolari, quasi entro una cornice, in modo analogo a ciò che si vede nelle figurazioni delle pareti delle urne volterrane. Pare proprio che i loro artisti abbiano avuto sott'occhio, fra gli altri modelli, anche delle opere etrusche; o almeno che i principî dell'arte Italiana si siano svolti in modo analogo a quelli dell'arte etrusca, innanzi che questa risentisse troppo dell'influsso dell'arte greca, attraversando i medesimi gradi evolutivi.

* * *

L'arte etrusca, in origine, si dimostra essenzialmente *verista* e *realistica,* per quella che il Nogara chiama *tendenza italica al naturalismo.* La scultura etrusca, come dice il Martha,[1] ha l'*istinto del ritratto,* istinto che egli pure chiama *nazionale,* e che si manifesta con gran forza negli affreschi di stile toscano, e spinge gli artisti a ricercare dappertutto, e perfino nelle minime cose, l'espressione della verità e della natura. Il Magni nella sua *Storia dell'Arte Italiana*[2] dice che la naturalezza degli atteggiamenti, la bontà del disegno, l'anatomia del nudo, il bell'andar de' panni, l'agilità, la vivezza, la grandiosità e la dignità, sono incontrastabili pregi di molte sculture degli Etruschi; e conclude che basta alla loro gloria, *ch'è gloria nostra,* aver essi soli in Italia, avanti che fosse Roma, coltivate le arti, architettando, scolpendo, e dipingendo, come attestano i monumenti scritti e la tradizione.

[1] *Art Étrusque,* p. 376.
[2] Pag. 117.

Digitized by Google

E il Della Valle, con uno studio interessantissimo sulle pitture degli ipogei tarquiniesi [1] veniva pure a dimostrare che l'Etrusco fu un popolo eminentemente artistico, ed aveva insito nell'animo il sentimento dell'arte.

In seguito gli artisti dell'Etruria si sforzano di imitare i Greci, e durante un certo periodo si hanno lavori talvolta grotteschi, talvolta poco organici, in cui però, attraverso il carattere ibrido delle composizioni, e la fusione eterogenea di elementi diversi, trasparisce sempre il verismo istintivo. Questa fusione risulta, per esempio, essere avvenuta, secondo il Nogara,[2] nel famoso sarcofago di *Lartia Seianti,* come in quello di Scipione Barbato, per quanto si riferisce ai Romani;[3] e, possiamo aggiungere ancora, nelle prime opere d'arte italiana. Basterebbe a provarlo un esame accurato dei bassorilievi del pulpito di Groppolo e di S. Bartolommeo di Pistoia, ricordati sopra, quando si confrontino fra loro.[4]

Ma anche presso gli Etruschi, come poi presso gli Italiani, a poco a poco la tendenza innata al verismo riprese il sopravvento. E perfezionati nella tecnica e nel gusto, pure imitando, seppero i loro artisti per certi riguardi riuscire originali, e financo *creare* alcuni *tipi,* in cui furono davvero eccellenti, tanto che il Körte, pure assai contrario ad ammettere l'originalità degli Etruschi in fatto d'arte, si vide costretto a riconoscere « che nell'accurata esecuzione tecnica gli Etruschi hanno raggiunto e *talora anche sorpassato i loro maestri Greci* »; e che non mancano lavori adornati artisticamente del periodo tra la fine del VI e la prima metà del

[1] *Corneto monumentale e la Necropoli Etrusca Tarquiniese,* Corneto, Piccioni, 1914, p. 58.

[2] Pag. 23.

[3] Pag. 30.

[4] Belle, l. c. p. 238 seg.

Digitized by Google

V secolo, « i quali giustificano pienamente il gran pregio in cui i candelabri etruschi e ogni specie di oggetti di bronzo eran tenuti in Atene, durante il periodo aureo dell'arte ».[1] Il Milani osserva a questo proposito che i candelabri di Montepulciano dimostrano come la tradizione dell'arte industriale chiusina durasse viva ancora nel secolo III a. C., « finchè la dominazione militare romana non soffocò la scintilla del genio etrusco ».[2]

I *thyrrena sigilla* di Orazio[3] « vi riverberano, aggiunge, la fama goduta, ancora all'età d'Augusto, da quest'arte eminentemente decorativa ». Il candelabro da incensi e il braciere della Boncia, col relativo *rutabulum,* « il primo decorato sul motivo di una statua atletica, spettante determinatamente alla scuola egineta », il secondo « con dei Satiri semisdraiati di tipo ionico che si riscaldano al fuoco », mostrano « qual grado di finezza e gusto squisito aveva raggiunto l'arte industriale in Etruria al tempo di Crizia, il tiranno ateniese, che si vantava d'aver la casa tutta montata di mobili etruschi ».[4]

Ed io credo che i Greci potessero essere dei giudici competenti!

Anche i nostri più grandi artisti scultori del '400 e del '500, nota un critico moderno, si vedono trattare con la grande arte, l'*espressiva*, pur l'arte affine, la *decorativa,* che assai malamente alcuni considerano inferiore, giacchè, se viene in sussidio della prima, e con essa serve a decorare fini masserizie ed arnesi ed utensili dei più volgari, solleva

[1] L. c., p. 68.
[2] *Museo topografico dell'Etruria,* p. 72.
[3] *Ep.* II, 2, 180.
[4] MILANI, l. c., p. 71.

Digitized by Google

questi al livello delle più alte creazioni della stessa grande arte, facendone dei veri capolavori.

E così si ebbero fra noi, per non citarne altre, tutte quelle meraviglie della scuola di Giovanni da Nola, del d'Auria, e del Caffaro, e le stupende cose di Fra Giovanni da Verona, di Ferrante Maglione, del Benincasa e del Vaccaro. E lo stesso Benvenuto Cellini divenne forse celebre solo pel suo *Perseo* e pel suo *Giove,* ovvero per le infinite piccole sculture di gingilli; e fin per le più minute quisquilie, intorno alle quali si affaticò per tutta la sua vita?

I Musei sovrabbondano di piccoli oggetti d'arte etrusca lavorati in bronzo; statuette votive, vasi di ogni specie, utensili, morsi da cavallo, prenditoi, maniglie, candelabri, borchie, e tanti altri, ai quali pure potrebbe riferirsi il giudizio del Körte e del Milani.

Ma in particolar modo, come prova della eccellenza, e anche della originalità di quest'arte, si debbono ricordare le oreficerie *a filigrana,* per le quali non si trovano esemplari adeguati neppure in Grecia, provenienti da Populonia, da Arezzo e specialmente da Vetulonia. Di alcuni di questi lavori appunto il grande Cellini confessava al pontefice Clemente VII, che egli non avrebbe saputo far di meglio.[1] Testimonianza preziosa per un'arte che, a quanto pare, era esclusiva degli Etruschi!

* * *

E anche a proposito di oreficerie si potrebbe quasi sospettare che gli artisti dell'epoca longobarda, i quali pure in questo genere di lavori si mostrarono assai provetti,

[1] Cfr. DUCATI, *La ricerca archeologica nell'Etruria, Atene e Roma,* 1913, n. 177-178, col. 279.

Digitized by Google

avessero avuto sott'occhio modelli etruschi. E non furono i Longobardi che occuparono e saccheggiarono le città etrusche più cospicue, dove certo potevano essersi conservati fino ai loro giorni preziosi cimelî, negli ipogei sepolcrali o anche nei monumenti sfuggiti al vandalismo degli altri barbari, e alla gelosa invidia dei Romani? Sappiamo da Paolo Diacono[1] che nella prima irruzione fu da essi occupata Sutri con altre città dell'Etruria e dell'Umbria, come *Polimartium, Horta, Tudertum, Ameria, Perusia, Luceoli,* ecc. Si potrebbe benissimo, anche da questo punto di vista, comprendere le relazioni fra l'arte etrusca e l'arte longobarda, e poi in genere l'arte italiana.

Che i Longobardi avessero un'arte assai evoluta quando giunsero in Italia, non è verosimile: secondo il Maffei[2] non avevano architettura nè buona, nè cattiva, come nativi di un paese dove pochissimo era conosciuto il fabbricare di muro.[3] Se dunque vi fu un'arte longobarda, questa dovette nascere in Italia, e, naturalmente, coll'imitazione dei modelli romani-etruschi. Così possono spiegarsi le analogie, che di quando in quando si avvertono fra l'arte, e in generale fra la civiltà longobarda e quella degli antichi dominatori delle regioni italiche, in cui i Longobardi vennero a fissarsi. D'altra parte è notevole, per non dire strano, l'ordinamento che questi diedero al nuovo regno d'Italia: 36 duchi confederati, 12 per ciascuna regione, sotto un re, in corrispondenza colle 36 lucumonie, nelle quali, secondo la tradizione, gli Etruschi avrebbero diviso il loro dominio nella nostra penisola. Chiusi, fra le molte altre città, riebbe un periodo

[1] Libro IV, capo VIII.

[2] *Verona illustrata,* I, cap. 11.

[3] Cfr. FERRARIO, *Il costume antico e moderno. Europa,* vol. VIII; della collezione XXIII, Firenze, Celli, 1837.

Digitized by Google

di splendore, mai più raggiunto in seguito.[1] E la pia regina Teodelinda, la virtuosa moglie di Agilulfo, non ha forse esercitato sul marito, a cui procurò il regno, quel benefico influsso che la regina Tanaquilla avrebbe spiegato su Tarquinio Prisco, lasciando di sè una memoria tanto viva e devota, che la sua conocchia e il fuso vennero conservati, monumento di ammirande virtù domestiche, nel tempio della Fortuna, come poi le reliquie di Teodelinda si custodirono fino ai nostri giorni nel tesoro di Monza? Più strano ancora sarebbe, se il nome di *Tanaquilla,* che gli etruscologi spiegano: *devota, sacra,* alla divinità espressa dalla voce *Thana,* corrispondesse antiteticamente, se non analogicamente a quello di *Theodelinda!*

* * *

Il genio italico, fuorviato prima dal servilismo bizantino, dopo le incertezze e le imitazioni, più o meno omogenee, dell'arte classica, potè alfine risvegliarsi, coll'impulso di questa, e riprendere la sua radiosa via, per giungere poi, nello splendore del Rinascimento, all'apogeo della gloria con quel *divino etrusco,* che fu Michelangelo.[2]

Nel '400 si può dire che, specialmente in Toscana, v'è stata come una *rincarnazione* della civiltà etrusca. L'arte in particolar modo offre di preferenza, in alcuni motivi, strane analogie coi monumenti etruschi.

Non mi fermerò col Milani — per citare un esempio — sullo stile delle porte del palazzo Riccardi di Firenze, che

[1] Cfr. LIVERANI, *Il Ducato e le antichità longobarde e saliche di Chiusi,* Siena, 1875.

[2] NOGARA, l. c., p. 25.

Digitized by Google

ricorrono tali e quali in un' urna chiusina;[1] mi contento di ricordare i capolavori Robbiani, che sono una delle più spiccate caratteristiche di questo periodo.

Non si sa nulla di preciso, neppure sull' origine stessa della scoperta di Luca della Robbia: tutto ciò che si può supporre, è che egli abbia visto qualcuna di quelle statuette di terracotta, che gli Etruschi, esperti nella chimica, rivestivano di uno smalto translucido.[2] E il Milani si domandava, a questo proposito, se i Robbia, rinnovatori nel '400 di opere etrusche, non avessero qualche cosa di *sangue etrusco* nelle vene.

Del resto nel '400 non solo l'arte, ma la letteratura, la scienza, la vita politica, i costumi; tutto si rinnova: le gelosie fra Stato e Stato portano, come conseguenza, l'invasione straniera; come le gelosie dei lucumoni etruschi portarono alla caduta di Veio, la fine del *nome etrusco,* che determinò il trionfo di Roma. E questa fu la continuatrice della potenza e della cultura tirrena; allo stesso modo che la Toscana divenne come il focolare, in cui si è perpetuata sempre la tradizione «latina». Il medesimo fatalismo nei due più notevoli periodi di manifestazione della vita italica, separati da 14 secoli; le medesime tendenze superstiziose,[3] la medesima scettica indifferenza, che, secondo alcuni, darebbe indizio di lunghissima evoluzione di vita civile.

* * *

Anche la scienza si rinnova, ho detto, col Rinascimento. Osservava già il senatore Buonarroti nelle sue sensatissime

[1] MILANI, *Museo di Fir.*, tav. XLIX, 1. Cfr. vol. I, p. 159.
[2] BELLE, l. c., p. 260.
[3] LELAND.

Digitized by Google

Aggiunte al Dempster, che, se « in iisdem regionibus consimilia ingenia identidem per diversas aetates emergant, et nascantur »,[1] non c'è da maravigliarsi che vi siano stati nella Toscana ingegni eminenti come Andrea Cesalpino, Michele Mercati, Francesco Redi, Galileo Galilei e gli Accademici del Cimento.[2]

E veramente io credo che non sia privo di significato il raffronto che alcuni hanno istituito fra il sistema eliocentrico affermato dal grande astronomo, che costituisce una delle glorie più fulgide di questo nobile Ateneo, e le teorie dei Pitagorici, in cui si volle vedere una qualche relazione colla misteriosa *disciplina* dei Tirreni. Se il genio dell'Arte classica rivisse nel '500 con Michelangelo, e se propriamente la Toscana ha prodotto di quando in quando le più luminose manifestazioni dell'arte, perchè non si può ammettere che sia avvenuto lo stesso anche della scienza? La dottrina augurale, i riti della orientazione, e in genere le *arti divinatorie,* implicavano conoscenze astronomiche assai estese, come ne fanno fede Censorino e Plutarco. E poichè queste loro arti sono state messe in rapporto con quelle della Caldea, sarebbe forse inverosimile che, per il tramite degli Etruschi, giungesse fino ai Pitagorici toscani del Medioevo e del Rinascimento una dottrina che stabiliva

> « sotto l'etereo padiglion rotarsi
> più mondi, e il Sole irradiarli immoto »!.

[1] Essendo che « eadem et permanens locorum, aëris et situs temperies » valga moltissimo « ad similem organorum corporis constitutionem producendam »; la qual cosa « ad ingeniorum acumen aut debilitatem maxime confert », aggiungendosi specialmente « simili vitae institutione per aetates servata, et ad posteros traducta ».

[2] Vol. II, p. 81, § XXXIX.

Digitized by Google

Or sono 4000 anni, scrive lo Chabas,[1] gli Egiziani sapevano che la terra si muove nello spazio; e non dubitavano punto di attribuire tale conoscenza alle generazioni passate: in alcune leggende egizie, il cui simbolismo si ritiene di origine caldaica, o derivato da fonti comuni, la terra vien detta *navigare* nello spazio secondo la volontà degli Dei!

* * *

Dopo quanto si è detto sulla continuazione dell'arte, e della civiltà etrusca in generale, nella civiltà romana e nell'italica del Medioevo e del Rinascimento, qualcuno potrebbe maravigliarsi che le ricerche e gli studi intorno alla lingua si siano proseguiti senza costrutto, per vari secoli, fino ad oggi. Come non vi sarebbe stata continuazione anche di quella nei nostri volgari? Eppure, malgrado ogni verosimiglianza, « tutto quello che la glottologia è disposta ad accordare all'eredità etrusca — scrive il Pullè[2] — si è la marcata aspirazione nella pronuncia dei Toscani, massime dei Fiorentini; la quale mentre non ha riscontro in nessun altro organo italico o celtico, ricorderebbe la ricchezza e l'accozzo di aspirate che ci presenta la scrittura degli Etruschi ». E per quanto altri, come il Meillet, sian disposti a riconoscere questa traccia, lo Skutsch concludeva[3] che di una « qualsiasi sopravvivenza delle caratteristiche della lingua etrusca nella lingua italiana moderna... non è stata addotta alcuna prova ».

[1] *Études sur l'antiq. historique*, p. 225. Cfr. BUONAMICI, *La Civiltà Egiziana*. Firenze, 1900, p. 59.

[2] *Profilo antropologico dell' Italia*, p. 41.

[3] In *Encyclop.* PAULY-WISSOWA, trad. PONTRANDOLFI, p. 115.

Digitized by Google

Rispetto agli elementi lessicali molti sono stati convinti che in italiano, e specialmente nei dialetti toscani, dovrebbero trovarsene non pochi — ed io pure credo che ve ne siano — ma quando si tratta di indicarli con precisione, pare che sfumino come nebbia al sole, di fronte all'analisi etimologica.

Nel latino si credette pure che non ne dovessero mancare, e il Lattes, dopo il Bücheler, lo ha affermato; ma non è riuscito poi altrettanto facile distinguerli con sicurezza. Anche quando l'analogia sia evidente e il significato sembri corrispondere, si resta sempre dubbiosi se non debba trattarsi semplicemente di *prestiti*. La parola *vinum*, per es. che si trova tante volte nelle *Fascie di Agram*, siamo certi che rappresenti un vocabolo posseduto dagli Etruschi in comune coi Latini, o non piuttosto un *prestito* che i primi han fatto dall'idioma dei secondi?[1]

Si dirà ancora: o non ci sono molte voci etrusche conservate dai Classici, e iscrizioni bilingui etrusco-latine?

Neanche a farlo apposta — forse per quel destino implacabile a cui ho accennato fin dal principio del mio discorso — si può dire che, ad eccezione di due o tre voci, se mai, nessuna di quelle che gli scrittori ci han tramandato come etrusche, si ritrova nelle iscrizioni. E allora?

Quanto alle bilingui, da quelle scoperte fino ad oggi non si è potuto, forse, ricavare sicuramente il senso che di una sola parola, cioè *clan*, che equivale a: *natus, filius*. E anche per questa, se ne conosciamo il senso, ne ignoriamo affatto la natura etimologica e grammaticale.

Restano però i resultati certi ottenuti col *metodo com-*

[1] Su questa parola *vinum* vedi quanto dottamente, da par suo, ha scritto il LATTES nella *Rivista d'Italia*, vol. I, fasc. III, 1919: *Verità e pregiudizi intorno alla questione etrusca*, Estratto, p. 5 seg.

Digitized by Google

binatorio, il quale — come tutti sanno — consiste nel determinare il valore di alcune parole, desumendolo dalla posizione che occupano nei monumenti, dalla relazione costante con altre voci, dal trovarsi scritte su oggetti, di cui si presume che esprimano il nome, ecc.

Sarebbe assurdo disconoscere l'importanza e i vantaggi conseguiti con tal metodo; e il programma che intendo svolgere in quest'anno si fonda appunto su quei risultati.

Non ho la pretesa di sostenere che l'ultima parola sia stata detta, che il mistero dell'etrusco sia ormai del tutto svelato, nè rimanga altro da fare se non esporre, commentandole, le ricerche del Pauli, del Deecke, del Bugge, del Torp, del Lattes, dell'Herbig.

Ma quello che affermo — e credo con ragione — è che hanno torto i pessimisti, i quali ci vanno ricantando che dell'etrusco non si conosce nulla all'infuori di poche parole, e che quindi è una lingua, se non *incomprensibile*, almeno *incompresa,* come ancora nel 1908 la giudicava il Meillet.[1] Il Lattes ha ben dimostrato ultimamente che anche dei più lunghi fra i testi a noi pervenuti, e sopratutto delle bende lintee della *Mummia,* si conosce il contenuto in modo sommario, e più o meno la significazione di parecchie voci, « sì da poterne, ora con certezza, ora con sufficiente probabilità, interpretare altresì, non senza giusto fondamento lessicale e grammaticale, alquanti incisi »;[2] e così dicasi della tavola fittile di S. Maria di Capua, del piombo di Magliano, del sarcofago dei Pulena, del Cippo di Perugia, ecc. E tanto basterebbe per giustificare un insegnamento di etruscologia, anche se limitato alla sola parte glottologica.

[1] *Introd. à l'étude des langues indoeurop.*, II, p. 3.

[2] *L'enigma etrusco,* in *Scientia,* Aprile 1919, Estr. p. 1.

Digitized by Google

L'etrusco dunque non è *indecifrabile,* se in qualche punto, almeno, si può dire che non sia più *indecifrato.* Avrebbe forse più ragione chi dicesse che fino ad ora non siamo stati capaci di stabilire con sicurezza a qual gruppo linguistico appartenga, perchè le voci spiegate sembrano potersi analizzare con idiomi diversi. So bene che le assidue ricerche del Lattes, a cui serviva testè come di riassunto un lucidissimo discorso del Cocchia, tendono ad accertare che si tratti di una favella italica, o almeno indoeuropea, quantunque non manchino pur oggi di quelli che la ritengono anaria. Anch'io, per vero, dopo molti anni di studi, nei quali ho avuto agio di esaminare tutti o quasi tutti i principali tentativi fatti cogli idiomi più indifferenti, mi sono indotto a riconoscere che le maggiori probabilità per una parentela coll'etrusco, se non sono ancora per le lingue caucasiche, come dopo il Thomsen riconobbe pure il Trombetti, lo sono più specialmente per le lingue indoeuropee, rispetto alle quali si possono affermare notevoli analogie, per quel poco che sappiamo, salvo poi a vedere se tra queste debba preferirsi l'armeno col Bugge, il paleoslavo o l'italico col Lattes, l'albanese col Thomopulo, il traciofrigio e il greco dialettale con altri.

Ma checchè ne sia, non si può in ogni modo giustificare lo scetticismo di chi nell'etruscologia vede solo un insieme di argomenti inorganico e incompleto, fondandosi sul fatto che la lingua non è ancora decifrata. Tutt'altro! L'etruscologia anzi possiede una vitalità tutta propria: e della sua importanza credo non si possa dubitare se non rinnegando le tradizioni più gloriose della patria nostra. Ma appunto perchè l'etruscologia è qualche cosa di reale e di concreto, è necessario che non si restringa alla sola questione linguistica; è indispensabile anzi che gli studi intorno alla lingua

Digitized by Google

vengano integrati colla trattazione di tutti quelli aspetti che il problema ci offre, e che ne costituiscono il carattere di *complessità,* da me sempre affermato.

Molto si è fatto col metodo combinatorio; ma non basta. Bisogna aggiungere ancora nuovi elementi a questo paziente edificio di ricostruzione; e poichè non è ragionevole aspettare aiuti dal *caso* — come alcuni sfiduciati vorrebbero, invocando la scoperta di una lunga iscrizione bilingue — occorre aiutarci in altra maniera. E questa maniera l'ho indicata da più di 10 anni, in varii luoghi, e specialmente in una *Memoria* presentata al Congresso internazionale di Archeologia nel 1912. Essa consiste nell'affrontare la sfinge etrusca da tutti i punti di vista delle varie scienze che — oltre alla glottologia — hanno occasione, per un motivo o per l'altro, di occuparsi di quel popolo misterioso: archeologia, topografia, storia, paletnologia, etnografia, ecc. Solo così facendo potremo metterci in grado di rispondere adeguatamente alle due domande: *Chi furono gli Etruschi,* e *qual lingua parlarono?* domande la cui risposta — dirò così — sintetizza la trattazione completa del problema, quale dobbiamo proporci.

Ne viene quindi per conseguenza che la ricerca non deve limitarsi alla parte teorica, ma deve, sopratutto, scendere nel campo pratico. Qualunque sforzo si compia a tale uopo, non sarà superfluo, nè inopportuno: se noi siamo gli eredi della civiltà etrusca per il tramite di Roma, abbiamo anche il dovere di mostrarci grati ai nostri maggiori, col custodirne le tradizioni gloriose perpetuate di secolo in secolo. Il « *Rinascimento* » si è avuto sempre guardando al passato, ispirandoci ai monumenti lasciati dai grandi che ci precedettero nella lotta per la conquista della civiltà. Ma questi monumenti non sono ancora tutti scoperti: per quanto nel-

Digitized by Google

l'ultimo cinquantennio siano stati fatti notevoli progressi, gli scavi non ci hanno ancor mostrato l'ultimo livello a cui giacciono sepolte le preziose reliquie dell'arte etrusca. Solamente gli scavi ci potranno mettere in grado di rispondere a quelle due domande in cui viene a compendiarsi il problema; e due sono i luoghi in cui si dovrebbero concentrare gli sforzi: *Cere* e *Veio*.

Le antiche tradizioni, di cui più volte ho fatto cenno, ci additano in queste due sedi i centri più vetusti della potenza e della civiltà etrusca, dai quali Roma avrebbe tratto i primi germi della sua vita politica e della cultura. Nè mi sembra debba trascurarsi di mettere questo fatto in relazione coll'altro che gli studi archeologici più recenti stabiliscono proprio nella regione circonvicina ad esse i primi saggi della civiltà che si suol chiamare di *Villanova*, civiltà che alcuni considerano come la prima fase di quella che apparisce poi come specificamente *etrusca*, e che, a sua volta, ne rappresenterebbe, secondo i più, il naturale svolgimento.

E ciò viene ormai dimostrato a sufficienza per *Veio*, dove gli scavi han rivelato una continuità assai notevole dalle più arcaiche tombe *a pozzo* fino alle grandiose costruzioni a tumulo, che rimangono ancora in parte da esplorare.

E poichè le tradizioni e le leggende, a cui servono di riprova queste scoperte, attribuiscono agli Etruschi anche le manifestazioni della vita di questo centro in epoche anteriori a Roma, ci danno un indizio non disprezzabile per confermare la ragionevolezza dell'ipotesi che ivi si abbia graduale evoluzione non solo di una medesima civiltà, ma ancora di una medesima razza.

Basterebbe dunque anche quello che è venuto fuori dagli scavi fatti fino ad ora, per giustificare la fiducia che il Pigo-

Digitized by Google

rini e il Colini esprimevano di risolvere, colla completa esplorazione di questa città, la *vexata quaestio* delle origini del popolo etrusco; senza parlare dei tesori d'arte, che certamente vi sono ancora nascosti.

Io spero che lo stesso potrà valere per *Cere,* quantunque fino ad oggi gli scavi non vi siano stati condotti con quella estensione e con quei criteri che sarebbero i più opportuni. Le tradizioni portano che anche Cere esisteva, come centro politico etrusco — e prima di Veio —, innanzi alla fondazione di Roma. Ma a differenza di Veio, che fu distrutta assai presto (396 a. C.), pare che Cere continuasse ad esercitare per un certo tempo una qualche influenza sulla vita civile e religiosa di Roma. Quindi per la sua antichità, e i suoi rapporti colla città eterna, mantenuti fino ad epoca tarda, è ragionevole supporre che ivi esistessero *iscrizioni bilingui.* Il famoso *sillabario* ceretano, che secondo il Lepsius rappresenterebbe la pronunzia etrusca, è molto antico; anzi, per comune sentenza, vien considerato fra i più arcaici monumenti del genere a noi pervenuti:[1] benchè posteriore a quel di Formello, che spetta circa al VI secolo, venne pure giudicato dal Barnabei di età antica indiscutibile. Gli alfabeti di Formello, poi, appartenendo al territorio di Veio, costituiscono come uno dei tanti anelli di congiunzione fra le due più antiche sedi della potenza e della civiltà tirrena. Non senza ragione pertanto credo di aver detto che Cere e Veio si dovrebbero sempre tener d'occhio per una probabile soluzione dei due quesiti sulla natura della lingua e della razza etrusca.

Ed io faccio voti che la ricerca archeologica venga quanto prima intensificata in questi due territori, con scavi

[1] LATTES.

Digitized by Google

sistematici e rigorosamente scientifici. Roma ebbe forse principio dal contrasto, o dalla gelosia delle due potenti lucumonie; forse dalla loro completa esplorazione potrà stabilirsi una base per sciogliere l'oscuro enigma. Esse, che furono la causa, benchè remota e indiretta, della caduta del *nome etrusco,* potrebbero divenir la causa della soluzione del mistero, che grava da tanti secoli sulla lingua e sulle origini di quella razza austera e malinconica che fu la nutrice di Roma.[1]

* * *

Ma per giungere a risultati concreti, è necessario che da noi si faccia qualche cosa di più che fino ad oggi non si è fatto. Non intendo già negare i progressi dell'archeologia e delle altre scienze che, direttamente o indirettamente, hanno trattato il problema etrusco. Ma ripeto quello che da molti anni ho sempre sostenuto,[2] cioè che si deve dare maggiore incremento alla scienza etruscologica. Fuori d'Italia essa è stata coltivata *con amore* e *con favore* da eminenti ingegni: fra noi non sono mancati gli ingegni — tutt'altro! — ma se hanno avuto l'*amore,* pur troppo è mancato ad essi il *favore!*

E tuttavia è nostro dovere interessarsi al problema: tocca *a noi* a risolverlo; e non dobbiamo lasciare questo compito agli stranieri. Sarebbe vergogna! Da molto tempo ho vagheggiato l'istituzione di una società per coordinare in un centro unico le energie esplicate da valenti studiosi nel campo di varie discipline, in ordine alla trattazione

[1] Menechini.

[2] Cfr. per es. *La questione della razza e della lingua degli Etruschi,* nella *Giovane Romagna,* anno II, 1909, n. 1, pag. 15 seg.

Digitized by Google

completa della questione etrusca, svolgendola in tutti i suoi diversi e molteplici aspetti. Siccome questo mio discorso non ha carattere di polemica nè di propaganda, non mi occupo per il momento di ribattere le obiezioni che alcuni potrebbero sollevare contro l'opportunità di una tale istituzione, e contro l'importanza e l'ufficio della stessa etruscologia, che pure mi sembrano risultare a sufficienza anche da quel poco che ho detto. Mi limito solo a confermare il mio voto che sorga presto questo centro di studi, questa *Società Italiana di Etruscologia,* la quale non soltanto sarebbe capace di sodisfare ad una viva esigenza della nostra cultura, ma contribuirebbe pure all'incremento di *una più grande Italia,* compiendo opera eminentemente patriottica.

E ciò in attesa che il lavoro unito e coordinato dei dotti valesse a persuadere i nostri dirigenti della convenienza di istituire ufficialmente un insegnamento di *Etruscologia,* in qualcuno dei nostri Atenei.

Allora — non prima forse, a meno di una fortuita combinazione su cui è poco da contare — si giungerà pure ad una qualche soluzione del problema della lingua. Poichè — devo dirlo, senza timore di venire accusato di circolo vizioso — mentre l'etruscologia viene da molti tenuta in scarso pregio, perchè ancora non si è riusciti a decifrare la lingua, io invece affermo risolutamente che, se non si coltiva *con intensità* e *con nuovo metodo* questa scienza, non potremo mai esser sicuri di raggiunger lo scopo. So bene che da un momento all'altro potrebbe scoprirsi — *per caso* — la sospirata *bilingue;* ma vogliamo noi aspettar tutto dal caso, e intanto astenerci da ogni ricerca, col comodo pretesto che *etrusca sunt, non leguntur,* e quindi il problema è insoluto e insolubile? Questo sì che sarebbe un *circolo vizioso:* come uno che ricusasse di studiar medicina adducendo l'impotenza in cui

Digitized by Google

essa trovasi anch'oggi di guarire certe malattie. Quanto più una difficoltà apparisce grave, tanto più abbiamo il dovere di affrontarla, e di combatterla con studio assiduo, se ci preme la conquista del vero! Ci rassegneremo a ignorar sempre le origini prime della nostra storia e della nostra civiltà, o aspetteremo che vengano a farcele conoscere, a loro modo, — come sempre — gli stranieri?

Ho detto che l'*etruscologia* dovrà essere coltivata *con intensità* e *con nuovo metodo*. E quale sia questo metodo, risulta chiaramente — parmi — dal mio discorso. Trattandosi di una questione così *complessa,* è necessario che non ci limitiamo ad una sola scienza per risolverla, ma coordiniamo i procedimenti e i risultati di più scienze, di tutte quelle che, da vicino o da lontano, direttamente o indirettamente, hanno riguardo all'etrusco e agli Etruschi. Colla sola glottologia, — ho sostenuto più volte, e non mi stancherò mai di ripeterlo — non si può riuscire: lo prova il fatto che dopo qualche secolo di studi non si è giunti ad una interpretazione definitiva. Molti credettero d'aver trovato la *vera chiave* dell'etrusco, e questa *chiave,* diceva un dotto, non ha mai girato nella serratura per aprire la porta del mistero: a che hanno approdato i due grossi volumi del Corssen, e i 25 anni di ricerche del Martha, limitati alla indagine linguistica? Bisogna spogliarsi di ogni preconcetto etimologico, storico, archeologico o antropologico esclusivo: la luce non può venire che dalla prudente cooperazione di tutte queste scienze; *vis unita fortior!* Il canone preferito dagli odierni etruscologi: *studiar l'etrusco coll'etrusco,* canone che riassume i procedimenti del metodo *combinatorio,* è certo di gran lunga superiore ai canoni del metodo etimologico, ed ha prodotto, senza dubbio, risultati notevoli e sicuri; ma questi risultati sono ancora troppo scarsi perchè il mistero possa dirsi sve-

Digitized by Google

lato. Si può benissimo, anzi si deve partire da questi dati, per orientarci nel cammino; ma sarebbe assurdo fermarsi qui e contentarsi di così poco.

La ricerca deve esser condotta nel *campo pratico:* lo studio si può cominciare a tavolino — per modo di dire —, ma i materiali per completarlo si devono attendere dallo *scavo.* E lo scavo ha dato già molto: i nostri Musei, pur troppo meglio conosciuti e illustrati dagli stranieri che da noi, — almeno fino a pochi anni fa —, son pien di cimelî etruschi, ed ancora — non senza nostra vergogna — i Musei di Oltralpe e di Oltremare; ma non bastano all'uopo. Occorre perseverare con pazienza e sopratutto *con passione.* Le scoperte più cospicue si son dovute più all'amore che alla tecnica, diciamo così, della ricerca; valgano ad esempio i maravigliosi trovamenti dello Schliemann a Troia e del Falchi a Vetulonia.

Dopo si potrà tornare con più frutto allo studio del tavolino, allo studio della lingua; e così sarà completo il circolo, che, lo ripeto, non è un *circolo vizioso.* Ispirato dai nuovi materiali messi alla luce, fondandosi specialmente, e insistendo nell'esame dei *contesti,* — processo che ha condotto alla decifrazione delle *Tavole Eugubine* — questo studio riuscirà più fecondo, e ci darà modo, un giorno, di togliere finalmente il velo che da quasi 20 secoli ricopre il pensiero adombrato da più migliaia d'iscrizioni.

Quale sodisfazione proveremo nel risolvere — mediante tale scoperta — le tante altre questioni importanti relative alla storia, alla religione, ai costumi, alla civiltà insomma di coloro che furono i Maestri di Roma!

Di fronte a questo risultato ogni fatica deve sembrare lieve, ogni sforzo tollerabile: lavoriamo con fiducia, e il fine raggiunto ci compenserà della lunga attesa, nella coscienza

Digitized by Google

di aver compiuto anche un dovere di patriotti, di Italiani. Non avremo più bisogno di ricorrere a fonti straniere — come abbiamo fatto fino ad ora — per studiare le nostre glorie; ci emanciperemo anche per questo riguardo da ogni servitù, riparando alla vergogna subita quando l'opera veramente grandiosa del *Corpus Inscriptionum Etruscarum* — sebbene poi proseguita anche da un italiano — fu iniziata da stranieri.

Non ho timore di rimanere solo in questo appello, che rivolgo ad ogni amante degli studi e della patria. Son certo che molti vi risponderanno, e meglio di me continueranno per questa via, di cui son pago avere additato il principio, lasciando intravederne la gloriosa meta da raggiungersi quando il destino avverso, che per così lungo periodo ha gravato su quel popolo, sia vinto, e la secolare *sfinge etrusca* abbia finalmente trovato il suo Edipo.

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 3.

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI

Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

III.

Dott. VINCENZO BIAGI

LIBERO DOCENTE DI LETT. ITAL. NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

IL FIORE, IL ROMAN DE LA ROSE E DANTE

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOGRAFIA

α. — Manoscritti.

1. Unico, il codice H, 438 della Biblioteca della Facoltà di Medicina di Montpellier (cfr. G. Mazzatinti, in *Inventario dei mss. italiani delle biblioteche di Francia,* Roma 1888, vol. III, pp. 81-82 e Appendice II, p. 419 sgg. e specialmente pp. 611-613).

Comprende il *Romant de la Rose* (carte 1-110) e *Sonnets et chansons en vers du dit Romant* (c. 111-139), ma le due parti, l'una membranacea e l'altra cartacea, sono di origine e di scrittura diversa e assolutamente indipendenti. La scrittura di quest'ultima parte è della seconda metà del sec. XIV, come dicono i più, o anche della prima (cfr. più innanzi, pag. 16, in nota), e senza alcun dubbio si tratta di una copia, qua e là perfino lacunosa. L'amanuense sembra essere toscano: quello stesso che trascrisse il *Detto d'Amore,* che in un frammento di quattro fogli, fa ora parte del codice Laurenziano-Ashburnhamiano 1234 (cfr. S. Morpurgo, *Detto d'Amore, antiche rime imitate dal Roman de la Rose,* in *Propugnatore,* N. S., Bologna 1888, vol. I, parte I, p. 18 sgg.; A. Mussafia, ibid., I, parte II, p. 419 sgg. e A. Gaspary, *Zeitschrift f. Rom. Phil.* 1888, XII, pagg. 573-74). Per la storia del codice si ha una sola indicazione in basso del fol. di coperta, dove si legge. « Ms. de la bibliothèque de M. le Président Bouhier E, 59. MDCCXXI ». Ferdinando Castets nella sua edizione principe (cfr. Bibl. β, 1) diede in facsimile la pagina 122, contenente i sonetti 91, 92, riprodotti dal Morpurgo accanto ad un brano del *Detto d'Amore,* secondo il codice citato, per dimostrare che l'un poemetto e l'altro sono stati vergati dalla medesima penna.

Digitized by Google

β. — Edizioni.

1. Castets Ferdinand, « *Il Fiore* » *poème italien du XIII siècle en CCXXXII sonnets, imités du Roman de la Rose par Durante,* Montpellier-Paris, 1881.

Edizione condotta con poca fedeltà e frequenti errori sull'unico ms. esistente e corredata di un facsimile della p. 122 del ms. stesso, di un'introduzione, note e ampi raffronti col *Roman de la Rose.* Alle note concorse il sapiente giudizio dei proff. E. Monaci e A. D'Ancona, che corressero, dove il ms. appariva mal letto, o proposero congetture al testo errato. Il titolo fu aggiunto dal Castets, perchè l'anonimo autore parla della conquista di un *fiore,* che è poi niente altro che un *cunnus virginalis.*

2. Mazzatinti Giuseppe, *Il codice H, 438 della Biblioteca della Facoltà di Medicina di Montpellier,* in *Inventario dei mss. italiani delle Biblioteche di Francia,* Roma 1888, vol. III, pp. 611-730.

Ristampa, emendata fedelmente sul ms. e quindi assai migliore di quella del Castets. Precede un ampio ed interessante studio di E. Gorra (pp. 419-610), e per la ricostruzione del testo si tien conto degli emendamenti proposti dal D'Ancona e dal Monaci.

3. Della Torre Arnaldo, *Il Fiore,* in *Appendice* a *Tutte le opere di D. Alighieri nuovamente rivedute,* Firenze, Barbèra, 1919, pp. 183-223.

Riproduzione, non sempre corretta, del testo del Mazzatinti, con ortografia ammodernata e qualche variante, desunta più che altro dai suggerimenti del D'Ancona, del Monaci e del Mazzoni.

4. Alighieri Dante, *Il Fiore,* Firenze, Barbèra 1920.

Questa edizione che dovrà far parte della *Collezione Diamante* non à ancora visto la luce. Si annunciano pure imminenti un'edizione del Vallecchi, una del Le Monnier, a cura di Guido Mazzoni, e una terza a cura di E. G. Parodi.

Digitized by Google

γ. — HANNO SCRITTO DEL « FIORE »:

1. MONACI ERNESTO, *Una redazione italiana inedita del Romanzo della Rosa,* in *Giorn. di Filol. rom.,* (luglio 1878), vol. I, p. 239.

Dà qualche saggio del poema inedito, e nota come il gusto e l'arte italiana abbiano saputo trasformare e rifoggiare la materia poetica di Francia in modo più semplice e più elegante.

2. CASTETS FERDINAND, « *Il Fiore* » *poème italien du XIII siècle,* ecc. Montpellier-Paris, 1881, cfr. Bibliogr. β. 1.

Esprime timidamente l'ipotesi che il *Fiore* possa essere di Dante, forma abbreviata di Durante. L'accenno a Sigieri nel son. 92, la quartina del son. 97 attribuita a Dante, i frati Alberti del sonetto « Messer Brunetto, questa pulzelletta », e certe affinità tra il *Roman de la Rose* e la *Divina Commedia* sono gli argomenti su cui fonda la congettura.

3. D'ANCONA ALESSANDRO, *Il Romanzo della Rosa in italiano,* in *Nuova Antologia,* 1881, LVIII, p. 694 e sgg.; riprodotto in *Varietà storiche e letterarie,* Milano, Treves, 1885, vol. II, pp. 1 e sgg.

Dà piena e illuminata notizia del *Fiore,* il quale rispetto al *Roman* francese « quanto perde di universalità tanto acquista di unità e di salda struttura »; ma è contrario ad assegnarlo a Dante. « Sebbene Dante derivi da Durante, altra cosa è Durante ed altra Dante, e non vi ha esempio, crediamo, in che i due nomi siano indifferentemente e alternatamente adoperati ». Il rifacitore nominando sè « dove pur si nomina il poeta francese », Durante non deve ritenersi nome allegorico. « Resta dunque da scoprire un ser Durante vissuto sulla fine del secolo XIII, o sui primi al più del successivo ».

Esclusi i vari Duranti conosciuti o rintracciati in documenti, fra cui un messer Durante di messer Scolaio degli Abati, che sarebbe stato, secondo il Passerini, suocero di Dante, il D'Ancona si compiace di non entrare « nel vano regno delle congetture », tanto più che l'avo di Dante non avrebbe potuto « tra l'84 e il 94, metter mano a un poema che à impronta tutta giovanile ».

Cfr. in *Giorn. stor. della lett. ital.,* 1888, XII, 470, dove si citano altri contrari all'opinione del Castets.

Digitized by Google

4. Gorra Egidio, *Il codice H, 438 della Biblioteca della facoltà di Medicina di Montpellier (già Bouhier E, 59)*, in *Indici e Cataloghi* del Mazzatinti, *Manoscritti italiani delle Biblioteche di Francia*, Roma, 1888, Vol. III, pp. 419-610.

Lungo ed accurato studio che precede l'ediz. critica del *Fiore* curata dal Mazzatinti (cfr. Bibliografia, ?, 2).

Il *Fiore* è riproduzione del *R. de la R.* Esaminato il carattere delle due opere, premesse alcune osservazioni intorno all'autore del *Fiore* e alla data della sua composizione, il Gorra espone le ragioni, che lo fanno dissentire dal Castets e porta la data del poemetto ai primi del sec. XIV.

Istituisce poi un continuato raffronto fra i sonetti del *F.* e il *Roman*, completando e correggendo il precedente lavoro del Castets e aggiungendo a ogni sonetto il suo giudizio per quel che riguarda la minore o maggiore libertà presasi dallo scrittore italiano sul suo modello.

I due testi però non sono di solito accostati: della maggior parte dei brani del *Roman* si cita solo il primo e l'ultimo verso.

Passando da ultimo a un'analisi del poema francese, il Gorra nota fra l'altro, che l'opera di Guillaume è animata da spirito diverso da quella di Jean: cavalleresco l'uno, alla maniera dei provenzali; satirico e scollacciato l'altro. L'Anonimo del *Fiore* preferí lo spirito e l'indole della seconda parte, mentre quello del *Detto d'Amore* seguí Guillaume.

5. Casini Tommaso, *Di alcune recenti pubblicazioni dantesche*, in *Rivista critica* V, 5 (1888) pp. 144-148; riprodotto in *Scritti danteschi*, Lapi; Città di Castello, 1913, p. 283 e sgg.

Un toscano rifece liberamente, ma seguitandola passo passo, la seconda parte del *R. de la Rose* di Jean de Meun. Il *Fiore* appartiene al Dugento ed è anteriore alla *D. Commedia;* gli argomenti in contrario del Gorra non reggono. Tende quindi a rafforzare gli argomenti del Castets per l'attribuzione del poemetto a Dante. Conclude: «Né io dirò che il rifacimento sia opera dell'Alighieri; ma dico e affermo non dimostrato che sia d'altri e m'auguro che la questione non sia lasciata cadere».

6. Gaspary Adolfo, *Storia della letteratura italiana*, tradotta da N. Zingarelli, Torino 1887, vol. I, p. 169.

Crede che il poemetto sia stato composto nel sec. XIV; nel rifare il *Roman* francese l'A. mostrò notevole abilità.

Digitized by Google

7. Torraca Francesco, nella *Rassegna della lett. ital.*, in *Nuova Antologia,* 1889, XIX, I; cfr. in *Nuove Rassegne,* Livorno, 1894, p. 89 e sgg.

Dà notizia delle edizioni del Castets, del Mazzatinti e degli studi del D'Ancona e del Gorra. Giudica il lavoro del Gorra dotto, ma fatto quasi sempre con materiale di seconda mano e in molte parti inutile. L'Autore del *Fiore* « aveva ingegno, e, per il tempo suo, anche gusto... sa evitare le lungaggini dell' originale, sa condensar molto in poche parole, sa dar rilievo alla forma: non di rado trova immagini, conia versi, che fermano e fanno pensare ». Il Gorra avrebbe dovuto determinare i principali caratteri dell' *originalità* dell'Anonimo, e correggere molte opinioni inesatte sul *Romanzo della Rosa,* di cui la parte dovuta a Jean de Meun à lunghi tratti derivati da Alano, dal *Panfilo* e da altre fonti divulgate.

8. Castets F., « *Il Fiore* » *et ses critiques,* in *Revue des Langues Romanes,* III série, V, 1891, pag. 307 e sgg.

Torna sulla sua ipotesi per confermarla.

9. Zingarelli Nicola, in *Dante,* Milano, Vallardi; cfr. *La vita di Dante in compendio* ecc., Vallardi, p. 10.

L'A. del *Fiore,* « se nel nome ha qualche cosa di comune con Dante, è troppo alieno dalla sua finezza e dal suo ingegno, e argomenti decisivi ed inoppugnabili non esistono in favore dell' attribuzione ».

10. Mazzoni Guido, *Se possa « Il Fiore » essere di Dante Alighieri,* in *Raccolta di studi critici dedicata ad A. d'Ancona,* Firenze 1901, pp. 657-692.

Sostiene « non già la certezza che *Il Fiore* sia opera di Dante, ma la ragionevolezza dell' ipotesi del Castets » e la verosimiglianza. Argomentando sui fatti noti, vi si può ravvisare Dante e l'attribuzione è conveniente.

La composizione non dovrebbe risalire più indietro del 1284, anno della morte di Sigieri (cfr. *Il Fiore,* son. 92), al tempo in cui il *Roman de la Rose* era fra noi nella sua diffusione.

Il sonetto di Dante a Betto Brunelleschi « Messer Brunetto questa pulzelletta » può ben essere una dedica del *Fiore* (fra 1279 e il 1311).

L'autore è toscano, o fiorentino, mente eletta e mano esperta, che à saputo padroneggiare il duplice testo francese, sceverarne il filo conduttore,

Digitized by Google

svolgerlo con disinvoltura e colorirlo; gusta il testo dentro di sé e ne esprime il succo con fervida originalità, raddensando, rinvigorendo l'originale.

Due volte si nominò da sé: Durante (son. 82) e ser Durante (son. 202). Nome allegorico o proprio? Certo proprio, corrispondente nel son. 82 alla menzione che Guglielmo di Lorris fa di se medesimo, e *ser* è forse un aggiunta scherzosa.

Ser Durante da San Miniato, o ser Durante di Giovanni? Del primo si à una sola ballata; il secondo visse nella seconda metà del secolo XIV, ed à quattro soli sonetti, molto brutti. Dante da Volterra viveva nel 1468, Dante da Maiano finí di scrivere verso il 1275, e fu costantemente arcaico.

Tutto sommato, anche l'Alighieri può concorrere alla paternità. Un'antica novella gli attribuisce la prima quartina del son. 97 del *Fiore*, passata in proverbio e riferita anche da Bindo Bonichi.

La didascalia del sonetto di dedica al Brunelleschi (Cod. Vatic. 3214 e Universitario di Bologna 1289) ci assicurerebbe, che chi invia il sonetto stesso è Dante [Alighieri].

Anche l'altro sonetto rinterzato di Dante [Alighieri? o da Maiano?] a Lippo [Pasci de' Bardi] à una figurazione (pulzella nuda) analoga a quella del Brunelleschi.

Il *Fiore* poi offre qualche argomento interno favorevole (cfr. son. 98 e Purg. VI, 118-120; Sigieri); il contenuto si attaglia al periodo della vita peccaminosa di Dante; l'andamento del sonetto è simile a quello di qualche sonetto giovanile suo (Sonar bracchetti, cacciatori aizzare). Dante potè scrivere il *Fiore* prima di risentire l'efficacia dei latini e di Virgilio. È un'allegoria sensuale, ma i quaranta sonetti destinati a Falsembiante hanno la risata amara e il ghigno sottile della satira. L'Autore è tollerante cogli eretici Patarini, che Dante infatti non nomina mai nella *Commedia*, e smaschera con sagace ardimento i religiosi ipocriti, ragione per cui il poema rimase clandestino. « L'animo di chi scrisse il *Fiore* è quello di chi scrisse le acerbe invettive contro il clero corrotto (p. 607) », è un aristocratico, che si adira contro i mercanti oppressori, contro i borghesi arricchiti; ecco quindi un sentimento religioso e politico identico a quello di Dante.

« La patria, l'età, il nome, alcuni ordini del pensiero, alcuni concetti significativi, certe qualità della cultura e dell'arte, qualche raccordo curioso di casi e di accenni, ci hanno pertanto presentati in una singolare somiglianza tra loro il rimatore del poemetto profano e chi aveva da comporre il poema sacro: ravvicinarli di piú, compenetrarli in un solo, non è impresa temeraria, da che una tal quale tradizione antica attribuiva a Dante una quartina di Durante passata in proverbio e manoscritti autorevoli attribuiscono a Dante un sonetto che si trova in necessaria dipendenza col poema di Durante. Non mi dissimulo che tutto ciò mal basterebbe per dare all'ipotesi del Castets un fondamento saldo, ove nei sonetti apparisse una sola ragione interna d'impossibilità » (p. 689). Il poemetto « di Dante o no che sia » à innegabili pregi d'arte e fu tirato via alla lesta sulla falsariga del *Roman de la Rose*, senza scrupoli per la purezza della lingua, che è francesizzante.

Digitized by Google

Anche nel *Convivio*, quando Dante traduce dal latino, si hanno frequenti latinismi, ed è naturale che egli si vergognasse poi di tale opera o la tenesse nascosta, mentre altri, una volta compostala, tosto se ne sarebbe inorgoglito. Il silenzio che fu subito e durò attorno al *Fiore* può essere anch'esso di qualche peso in favore dell'ipotesi del Castets.

11. D'Ovidio Francesco, in *Nuovi studi danteschi*, Hoepli, Milano, 1907, pp. 567-600.

Recensione allo studio del Mazzoni, riprodotta dal *Bull. della soc. dant. ital.*, X, pp. 273-292.

Il poemetto italiano, composto tra il 1281-84 (morte di Sigieri) e il '95 (persecuzioni degli eretici per parte di Bonifacio VIII) è certamente opera di Dante, che lo dedicò al Brunelleschi col noto sonetto. Il Giano del sonetto stesso non può tuttavia essere Jean de Meun; forse è Giano della Bella, o un altro della cricca del Brunelleschi.

L'uso del sonetto a strofe e delle rime equivoche non ci permettono di passare i limiti del sec. XIII.

La lingua è toscana e non mancano allusioni storiche e proverbi locali. Ci sono indizi di redazione frettolosa, troppi gallicismi, ma nel suo genere l'opera è un capolavoro.

« È un'opera organica (p. 576) che rivela uno spirito originale, capace di sfrondare, di rifare, d'aggiungere di suo, d'aggiustar tutto senza scuciture, di ripensar prima il tutto insieme, mettendo la compattezza in un vasto poema, dal quale un traduttore ordinario sarebbe rimasto schiacciato: uno spirito lepido, agile, giovenilmente spigliato e baldo ». Il cimelio par gridare ogni tanto di sè: « Quei che mi fe' non era un arfasatto! » Non ogni sonetto è felice, ma il poeta rivaleggia nell'uso del sonetto con Rustico, Folgore, Cecco. La rassegna di ciascun Durante, o Dante, porta a scartarli tutti; resta quindi Dante Alighieri, pel quale Durante veniva ad acquistare le virtù di un nomignolo (Durante in amore).

Prove dirette della sua candidatura sono: l'antica novella che riporta il principio di un sonetto come di Dante, e se tali versi sono pure del Bonichi, morto nel 1338, non conta. La quartina del *Fiore* era passata in proverbio, benchè la diffusione del poemetto fosse presto annichilita.

Nella *Commedia*, tanto morale e mistica, c'è qua e là « saggio di spirito comico o burlesco o birichino, e di grandi attitudini alla rappresentazione di cose laide: se un *Fiore* non ci fosse giunto, noi dovremmo immaginare qualche cosa di simile, come tirocinio alla *Commedia* ». E poi c'è il traviamento, la tenzone con Forese, le canzoni petrose; ben venga anche il *Fiore!*

12. Cian Vittorio, *La Satira*, in *Storia dei generi letterarii italiani* del Vallardi, Milano, p. 104-106, e 152-154.

Digitized by Google

Dopo aver trattato della satira nel « *Roman de la Rose* » di Jean de Meun, il Cian parla del *Fiore*. Sia esso dell'Alighieri o di tutt'altra persona, nei 232 sonetti, con felice vigore di sintesi, è compendiato il grande poema di Jean de Meun e l'elemento satirico vi à una parte notevole, assai più che nell'originale francese: è satira antichiesastica ed antifratesca: qualche volta proviamo l'illusione di aver dinanzi un prodotto originale d'uno dei nostri rimatori satirico-burleschi dell'estremo Dugento, come nel tratto che riguarda Falsembiante.

La satira qui è anche contro gl'ipocriti e i borghesi, cioè mercanti e trafficatori, nè mancano tratti di spirito antifemminile. Il rifacitore sostituisce i personaggi del *Roman* con altri italiani e contemporanei. In tali casi si avvertono le maggiori aggiunte, come nel son. 92, quella su frate Alberto, l'inquisitore feroce. Al contrario certe omissioni (p. es. quelle contro i lupi rapaci spogliatori del povero e l'altra sul matrimonio) si spiegano colla diversità delle condizioni sociali.

13. Parodi E. G., in *Marzocco,* 31 marzo 1907.

« Sarà una fantasia, ma pure a me non pare una fantasia piú brutta e meno ragionevole di tante altre, immaginare che Dante, già sognando del poema futuro, si vien quasi facendo la mano, ricercando ansiosamente l'espressione e nella difficile prova di una riduzione in sonetti delle lunghe scene francesi, intravede l'arte meravigliosa ed affatto nuova dei brevi canti della D. C. ».

14. Farinelli Arturo, *Dante e la Francia,* Hoepli, Milano, 1908, vol. I, pp. 22-29.

« Usciva Dante dall'adolescenza, quando Jean de Meun compiva la seconda parte del R. de la R. », Bibbia profana. Jean « poeta facile e fluido » dà al romanzo la verace e durevole impronta e questo è imitato nel *Fiore* e nel *Detto d'amore.* Già Brunetto Latini leggeva il *Roman,* se ne giovò il Petrarca e il Boccaccio; è follia supporre che Dante lo ignorasse. Ma la Rosa mistica del Paradiso non à che fare colla rosa impudica del *Roman.*

Dante che ideava già la glorificazione futura di Beatrice, che aveva già tratte a nuova luce le nuove rime e composta la *Vita nuova,* non poteva mettersi a rielaborare una satira sboccata, un'allegoria di oscena sensualità, con pochi tratti originali. Pochi e tenui argomenti esterni non bastano: l'opera francese è il rovescio della meravigliosa e densa opera dell'Alighieri.

Il nome, Ser Durante, il sonetto di dedica al Brunelleschi son prove fallaci, e insignificantissime le coincidenze fra il *Fiore* e la *Commedia* : mentre l'accenno alla morte di Sigieri depone contro.

Digitized by Google

La filastrocca dei sonetti è opera del 300 e non del 200 e artisticamente lontanissima dall'arte di Dante. Diversa ne è « arte, stile, anima, vita, individualità, potenza immaginativa ed espressione ». Il mondo degli affetti, le mistiche credenze, la lingua impregnata di gallicismi, il fare giullaresco, il pensiero diluito e stemperato ci portano ad escludere Dante. Anche G. Paris, non persuaso delle argomentazioni del Mazzoni, notava (*Romania*, 1901, ottobre, p. 595) l'inverosimiglianza del silenzio ostinato di Dante rispetto al *Fiore*, che stranamente si opporrebbe alla « ténacité extraordinaire » e all' « importance... qu' il attachait à toutes les évolutions de sa pensée et de ses sentiments ».

15. Benedetto Luigi Foscolo, *Il « Roman de la Rose » e la letteratura italiana*, in *Beiheft zur Zeitschrift für Romanische Philologie*, Halle, Niemayer, 1910, pp. 1-260.

È il 21 supplemento della *Zeitschrift*, lavoro fondamentale, condotto con molta dottrina e larga preparazione. Particolarmente interessante, l'introduzione, in cui l'A. analizza il *Roman* francese, e i due primi capitoli dove si studiano i rapporti fra il *Roman* e Brunetto Latini, e i rifacimenti italiani: (*Il Fiore, Il detto d'Amore*). Pel *Fiore*, esaminati gl' intenti generali del traduttore (p. 101) e le qualità metodiche e artistiche dell'esecuzione (p. 102), si pone in chiaro la personalità di Durante come uomo e come poeta (p. 105).

Egli ebbe con Jean de Meun « affinità psichiche molte e notabili: se dal suo rifacimento Guillaume scompare e domina esclusivo il continuatore, ciò dev'essere innanzi tutto avvenuto per un moto spontaneo della sua particolare persona morale. È poi facile che in lui all'impulso del sentimento si sia congiunta la voce semplice, ma infallibile del suo buon senso artistico ». Però l'autore italiano supera quello francese « nello scetticismo, nell'incredulità schernitrice e beffarda ». Il suo stile è spontaneo e fresco, il tono brioso e spigliato. Alcuni versi sono forniti di un certo dantesco vigore e fanno pensare; nel complesso l'arte è ammirevole.

Il misterioso Durante fu l'unico vero interprete del pensiero e dell'arte di Jean. « Egli scoprì con sicurezza, non impedita dagli strani frequenti contrasti, l'anima del trovero; con sicurezza distinse dentro la molteplice, sontuosa farragine delle materie, la nitida trama ideale » (p. 101). Ciò che più gli piacque fu la sua chiassosa e impudica allegria ed omise tutto ciò che non era materia amorosa: sopprimendo, riassumendo, abbreviando, amplificando, trasformando. Oltrechè dall'elemento erotico, si sentì attratto dall'elemento satirico. Ce lo possiamo immaginare di festante vita, d'indole epicurea, libero da scrupoli religiosi; toscano, aristocratico d'origine, poeta vero.

Il rifacimento è degli ultimi del XIII, o dei primi del XIV.

Digitized by Google

16. Percopo Erasmo, in *La poesia giocosa,* nella *Storia dei generi lett. ital.* del Vallardi, 38 sgg.

Il rimatore italiano non fa che parafrasare Jean de Meun, ma rincara la dose contro le donne: l'episodio della Vecchia, figura resa popolare allora da due poemi latini, il Panfilo e l'Alda, è burlesca.

17. Percopo Erasmo, in *Rassegna critica della lett. ital.* (1907), pp. 49-56.

Suppone che autore del *Fiore* possa essere stato Rustico di Filippo.

Intendendo Durante uguale a «fino amante», cioè costante, fedele, in favore di Rustico sta il fatto che egli disse male delle donne, come si sa da Francesco da Barberino: — Et quidam sunt qui nituntur quotidie, ut auctoritates, quae faciant contra eas exquirant, et eorum famae detrahant et honori... Quid enim Rusticus Barbutus et alii quidam laudes ex vituperiis per eos impintis contra dominas reportarunt, videant quot et qui eorum super hiis scripta, honorant. —

Ora in quale opera Rustico vituperò tanto le donne, da essere segnalato come detrattore? I due sonetti per la Chierma non bastano, bisogna pensare ad altro.

Il *Fiore*, libera riduzione del *Roman de la R.*, fatta da un rimatore fiorentino della fine del dugento, si attaglia bene.

Intanto Dante è da escludere, anche perché Durante è un nomignolo. Rustico poté avere notizia del *Roman* dall'amico Brunetto Latini, che ne aveva imitata la parte di Guillaume de Lorris, e gli chiedeva nel *Favolello* un saggio della nuova poesia («trovato adesso»). Jean compose tra il 1270 e il '77, ma Rustico visse fin verso la fine del secolo e avrebbe composta l'operetta, senza darvi l'ultima mano. Il *Fiore*, nei brani originali, è opera di molta esperienza; svolge più la seconda, che la prima parte del *Roman*: infatti fra lo spirito di Jean a quello di Rustico ci sono molte analogie; i sonetti del *Fiore* e quelli di Rustico possono esser figli di uno stesso padre. Il Percopo si indugia a mostrarne le concordanze piú palpabili e conclude che l'A. del *F.*, non solo somiglia a Rustico, come ànno detto altri, ma è lui.

18. Langlois Ernest, *Le Roman de la Rose,* Paris, Didot, 1914, p. 39-41.

— A la fin du XIII siècle ou au commencement du XIV, un Toscan, nommé Durante, reduisit en 232 sonnets le *Roman de la Rose;* il a supprimé toute description, même celle du jardin où se trouve la «fleur» qui remplace la rose; il a de même laissé de côté toute les dissertations, scientifiques, où autres de Jean de Meun, ne gardant du poème que la partie érotique et la satire contre les ordres mendiants.

Digitized by Google

Il a substitué son nom à celui des auteurs français. M. Castets, qui à trouvé cette traduction dans un manuscrit de Montpellier, l'a publiée sous le titre *Il Fiore*.

De la même epoque et du même pays est un *Detto d'amore*, en vers septénaires, dont M. S. Morpurgo a retrouvé et publié les 480 premiers vers, écrits de la même main que *Il Fiore*. Ces vers, à rime équivoquée, sont directement inspirés par le *R. d. Rose*, et n'expriment aucune idée, qui ne se trouve déjà dans le poème de G. de Lorris et dans celui de Jean de Meun, surtout dans le premier.

L'influence du *R. de la Rose*, qu'on a cru constater dans la litterature italienne enterieurement au *Fiore* et au *Detto d'Amore*, notamment dans le *Tesoretto* de Brunetto Latini, est imaginaire.

Son action sur la poésie du XIV siècle est incontestable, mais plus d'un critique l'ont signalée là où elle n'existe pas.

Altre indicazioni bibliografiche.

Pel *Roman de la Rose* i mss. sono diligentemente classificati dal Langlois in *Les Manuscrits du Roman de la Rose. Description et classement.* Lille 1910, (*Travaux et Memoires de l'Université de Lille.* Nouv. série, I, 7); cfr. anche l'introduzione al I volume della succitata edizione del *Roman d. l. R.* a cura del Langlois stesso, pp. 48-55.

Per la parte dovuta a Jean, che è quella che più c'interessa, il Langlois, col concorso di due famiglie di codici, afferma di poter ricostituire il prototipo. Un gruppo di codici, con varianti e mutilazioni, non giunge che al v. 16798. Dei vari altri gruppi è interessante per noi sapere, che il ms. indicato dal Langlois colla sigla *Tou*, avrebbe per base un testo anteriore al 1290. Il testo ricostruito è ancora in corso di stampa.

Delle edizioni ò potuto consultare quella di Amsterdam (3 volumi in 12°, chez Jean Fred. Bernard, MDCCXXXV, a cura dell'abate Lenglet du Fresnoy); quella del Méon, riveduta e corretta su molti e antichi mss. (Paris, chez Didot,

Digitized by Google

1814, 4 vol. in 8.°); quella del Marteau, accompagnata da una traduzione in versi in francese moderno e da un introduzione, con note e glossario (Orléans 1878-1880, 5 volumi in 16.°): ma le citazioni le ò date secondo l'ed. Michel (Paris, 1864, 2 vol. in 12.°), perchè, nonostante le gravi manchevolezze, è ancora quella più alla mano e finora la sola seguita dai critici nostri.

Studi recenti sulla data di composizione del *Roman de la R.* sono:

P. Kupka, *Zur Chronologie und Genesis des « Roman de la Rose »*. Gardelegen, 1901; —

F. M. Warren, *On the date and composition of Guillaume de Lorris Roman de la Rose; Publications of the Modern Language Association of America,* XXIII, (1908); —

Benedetto Luigi Foscolo, *Per la cronologia del « Roman de la Rose »*; in *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XLIV, 1909, pp. 471-487.

Guillaume avrebbe finito la sua parte nel 1212. Brunetto Latini, che scrisse il *Tesoretto* prima del 1266 e con probabilità verso il 1262, si servì del *Roman de la Rose*. Jean, accintosi all'impresa di continuare il *Roman* nel 1255-56, lo avrebbe terminato nel 1262 circa. L'Autore cerca di spiegare i passi dell'opera di Jean che sembrano contraddirlo, ammettendo che il poeta portasse all'opera compiuta successive aggiunte e modificazioni.

La nuova ipotesi del Benedetto è stata combattuta e respinta dai critici nostri e stranieri, compreso il Langlois; cfr. in *Kritischer Jahresbericht über die Fortschritte der Roman. Philologie*, XII, e contro l'opinione del Warren ibid. XI, I, 101.

Digitized by Google

Ricordo l'impressione vivissima e curiosa, che io provai parecchi anni fa, quando lessi per la prima volta *Il Fiore.*

Mi venne tra mano nello scorrere il volume terzo dell'*Inventario dei manoscritti italiani nelle Biblioteche di Francia* del Mazzatinti, e lo lessi tutto d'un fiato, sorpreso di trovarmi dinanzi, quasi impensatamente, a un così strano gioiello. E non era già la disinvoltura del racconto, in quello che aveva di scettico e di scollacciato, che maggiormente m'attraesse, ma piuttosto quell'arte, che a me pareva singolarissima, di render vivo l'astratto, quella straordinaria facilità e immediatezza di concezione, quello snodarsi agile del sonetto, e la stessa unità e rapidità dell'azione, nonostante che il poeta s'indugi a lungo intorno a certe sue figure.

E questa è roba del due o trecento? Ed è stata raffazzonata e tradotta, come dicono, da un testo francese?

Dei due dubbi, il primo fu subito vinto: chè il Mazzatinti, il Gorra, il Castets, primo editore del poemetto, lo stesso Morpurgo, colla pubblicazione di un'operetta diversa, ma staccata dallo stesso manoscritto che contiene il *Fiore,* e vergata dalla stessa mano, me lo saettavano da tutte le parti, ed anzi il Castets e il Morpurgo giungevano a mettermi sotto gli occhi la riproduzione fotografica di brani di

Digitized by Google

scrittura del codice, scrittura che, anno più anno meno, risale alla metà del trecento.[1]

Rimaneva l'altro dubbio, che invece di affievolirsi, si rinsaldava; infatti, posto che il codice non è autografo, e portata l'antichità della composizione ai primi del trecento, io non trovava difficoltà, per l'uso del sonetto come stanza in una composizione lunga, per le rime equivoche, per certi riferimenti storici e alcuni caratteri di concezione e di stile, ad anticiparne la data di cinquant'anni, e nemmeno la cronologia vi si opponeva allora, perchè il Gorra mi lasciava dubbioso intorno a quel Sighieri o Sigieri, la cui morte si presentava a me come limite oltre il quale non era lecito risalire. Di che Sigieri si trattava? Di quello di Coutrai, o di quello di Brabante?

Vero è che il Gorra aveva avuto cura di istituire un continuato raffronto tra il poemetto italiano e il *Roman* e ne tirava via via la conferma della derivazione francese già sostenuta dal Castets; ma il suo metodo non mi convinceva, per la semplice ragione che, trattandosi del confronto di due testi *F.* e *R.*, i cui rapporti erano indubitabili, io non riuscivo a trovare nessun serio inconveniente, se avessi capovolta la tesi, ammettendo non già *F.*, dipendente da *R.*, ma l'inversa. Per me insomma, tanto per dare un esempio, i vv. 21653-21665 del *Roman de la Rose*, stavano al son. CCXXI del *Fiore*, come il son. CCXXI del *Fiore* stava ai versi citati sopra; nell'uno e nell'altro caso la conclusione era la stessa e si compendiava nella parola usata dal Gorra: imitazione!

Chi dei due era l'imitatore?

[1] Il Morpurgo però, che se n'intende, credette assegnare un tempo anteriore.

Digitized by Google

La dottrina del critico, la chiarezza dell'esposizione, i duecentotrentadue raffronti, e soprattutto la conoscenza diretta del *Roman de la Rose* e dell'opera di Jean de Meun, non mi rassicurarono punto sulla priorità di *R.* su *F.*; tanto che io ò continuato a stringermi nelle spalle, tutte le volte che ò letto nelle storie letterarie e in lavori speciali che il *Fiore* è un rifacimento del *Roman,* ed ò sempre più sentito il desiderio che un volonteroso prendesse una buona volta la via indicata dal Mazzoni, il quale, un ventennio addietro, riconobbe la necessità di riesaminare i rapporti tra il Romanzo francese e il poemetto italiano.

Venuta poi la volta, nella mia lunga e faticosa corsa, di trattare del *Fiore,* come ò già trattato di varie opere anonime, apocrife, o di dubbia autenticità, della letteratura nostra, era ben naturale che accogliessi il consiglio di chi mi è maestro. E così anche questa volta mi son rifatto da capo, ho studiato pazientemente il poemetto non solo in sè, ma ne' suoi rapporti col *Roman* francese e colla storia del tempo, e non solo come documento storico, ma come opera d'arte, e ne ò analizzato più da vicino la lingua e lo spirito.

Se per questa strada mi sarà possibile arrivare a qualche dato positivo anche sul probabile autore, tanto meglio; se non mi sarà possibile, resterò contento di aver chiarito dubbi, sciolte difficoltà, cercato o tentato di veder più a dentro, perchè mi è stato sempre più a cuore la cosa fatta, cioè il documento e l'opera d'arte, di chi la fece.

* * *

Cominciamo subito dalla parte più interessante, quella cioè che tocca le fondamenta stesse dell'edificio da ricostruire, cioè dall'indagare i rapporti tra il poemetto italiano e il

Digitized by Google

Roman de la Rose, e cerchiamo di dimostrare la verità della nuova tesi, scaturita non a caso, ponendo anzitutto che, se una parte del *Fiore,* e precisamente i primi trentadue sonetti, sono un rifacimento liberamente sunteggiato dell'opera di Guillaume de Lorris, perchè la cronologia ci porta un dato inconfutabile, è altrettanto certo che nessun indizio cronologico dimostra che esso sia posteriore alla continuazione, che Jean de Meun compose alla distanza di più di quarant'anni. Gli sforzi generosi di Luigi Foscolo Benedetto, che dieci anni fa intese provare, come all'opera del De Meun dovesse assegnarsi una data anteriore al *Tesoretto* di Brunetto Latini (1262 circa), sono caduti nel vuoto: la critica nostra e straniera ha respinto un'ipotesi, a cui lo stesso dottissimo autore non à saputo dare fondamento.

Infatti il termine pel *Fiore* si può ben porre tra 1281-83, data approssimativa della morte di Sigieri [1] (son. 92); per la continuazione di Jean De Meun le opinioni furono così discordi da portare differenza di quasi un secolo. Pel Thevet, Jean fu contemporaneo di Carlo V (1364-1380), pel Bouchet,

[1] Potrebbe però Sigieri esser morto prima, perché ogni sua attività sembra finire nel 1277, e la Corte romana fu in Orvieto per qualche tempo anche prima di Martino IV. Su Sigieri c'è un'abbondante letteratura, modernissima. Fondamentali gli studi del Mandonnet, il quale crede che Dante non conoscesse direttamente gli scritti del filosofo brabantino (*Siger de Brabant et l'Averroisme latin au XIII siècle,* Lovanio 1910-11; cfr. Bruno Nardi, in *Rivista di Filos. neoscolastica,* aprile ottobre 1911, febbraio-aprile 1912). Che fu ucciso da un suo chierico improvvisamente impazzito, lo dice il Continuatore della *Cronaca Brabantina:* « Qui Sigerius, natione Brabantinus, eo quod quasdam opiniones contra fidem tenuerat, Parisiis subsistere non valens, Romanam curiam adiit: ibique post parvum tempus a clerico suo quasi dementi perfossus, periit ».

Digitized by Google

di papa Giovanni XXII (1316-1334), pel Corrozet di Luigi X (1314-1316); il Masson, il Baillet, il Du Verdier dicono che visse sotto Filippo il Bello (1285-1314), il Lenglet du Fresnoy pone come limite non sorpassabile il 1305, anno in cui furono soppressi i Templari, dei quali si parla favorevolmente nel poema.[1]

Ma lasciando i biografi più antichi, che parlano all'ingrosso, e venendo ai critici moderni, Paul Paris ondeggia tra il 1282 e l'85, il Kupka sta per la seconda data: anno della morte di Carlo I d'Angiò di cui si dice nel poema: « Qui par divine porveance — Est ores de Sesile rois », e finalmente il Langlois, che in materia è duce e signore, dopo aver sostenuto, insieme con Gaston Paris, la data del 1277, di recente, nella lucida e dotta prefazione alla sua edizione critica del *Roman,* ora in corso di stampa, torna sui suoi passi, e avverte: « Il est extremement difficile de dater, même à quelques années près, la continuation du *Roman de la Rose* ».

La cronologia dunque non si oppone ad ammettere *come ipotesi dimostrabile,* che la continuazione del *Roman* dovuta al De Meun dipenda dal *Fiore.*

* * *

L'ipotesi acquista poi, in sè e per sè, un carattere generico di probabilità, quando si consideri che di 18 mila versi del De Meun, almeno 12 mila ànno fonti determinate e seguite più o meno fedelmente dall'autore, che confessa più volte di non aver detto cosa che non si trovi già scritta.

[1] Cfr. L. F. Benedetto, *Per la Cronol. del « Roman de la Rose »,* in *Atti della R. Accad. di Torino,* vol. XLIV, p. 476 sgg.

Digitized by Google

Il Langlois, giunto alla fine del suo dotto e paziente lavoro sulle fonti del De Meun, confessa anzi: — J' aurais pu grossir beaucoup [la liste]... — e promette di darne notizia, sotto forma di note, nell'edizione che, come si è detto, è ancora in corso di stampa.[1]

La dottrina dell'illustre letterato francese in materia è così grande, che io sono stato in dubbio, se non dovessi attendere che il suo lavoro fosse compiuto, prima di arrischiarmi ad una dimostrazione così radicalmente sovvertitrice; ma d'altra parte, assicurandomi egli che nella nuova opera porterà solo un rincalzo, un'aggiunta alle sue precedenti conclusioni, mi son creduto abbastanza sul sicuro, tanto più che, come si vedrà, non ò trascurato io stesso lo studio delle fonti, l'ò anzi esteso ad alcuni campi che non erano stati esplorati fin qui.

Del resto, per la premessa da cui io parto, crederei che non ci fossero sorprese di sorta: il lavoro del Langlois sulle fonti, così largo e minuto, mi dà fin d'ora il diritto di affermare che di veramente originale nel De Meun resterebbe soltanto la parte piú viva del racconto, che l'Anonimo del *Fiore* avrebbe travasato, cioè la struttura interna dell'immenso edificio, o, in altri termini, lo sviluppo dell'azione, le avventure dell'*Amant* per giungere a cogliere la rosa e la concezione dei mezzi adatti a conseguire l'intento. Ora come è possibile non lasciarsi prendere da sospetto, quando si scorge uno che va colle stampelle per tre quarti del cammino, là dove è più facile e piano, e poi, nei tratti di strada più erti e difficili, le butta via e si mette a camminare spedito colle proprie gambe? E come si concilia, che l'impalcatura dell'immenso edificio di Jean è nel complesso così agile da non lasciare av-

[1] E. Langlois, *Origines et sources du R. de la Rose*, p. 193.

Digitized by Google

vertire alcuno sforzo di concezione, e il resto invece, che è la parte piú lunga, à in sè tanto stridenti le contraddizioni, gl'intoppi e l'assurdo da destare le meraviglie anche nei più caldi ammiratori?

E che cosa ha fatto d'altro, questo poeta, pensato o scritto di suo, perché si possa senz'altro credere, che la sua natura lo portava ad imitare con fatica gli altri e a concepire agilmente da sè? Il *Testamento,* per tacere di quel non poco che è a lui soltanto attribuito,[1] non si saprebbe dire se sia piú pedestre o prosaico; e la colpa non è certo del tema, perché il rimpianto dei tempi passati, il rammarico pei trascorsi giovanili, la rinnovellata aspirazione a Dio, gli potevano ben suggerire almeno un accento commosso. Insomma, traduttore discreto, espositore lungo e faticoso di dottrine, facile verseggiatore con una sua polla di satira e di scherzo, Jean de Meun si comprende, poeta di vena si dura fatica a figurarlo.[2] Eppure nello svolgimento del racconto, nella nitida trama, nella concezione di certi tipi del *Roman,* se fossero farina del suo sacco, saremmo costretti a considerarlo tale!

[1] Cfr. quello che dice L. F. Benedetto (nell'*op. cit.*, p. 83) del *Songe:* « mediocrissima composizione, lontana da ogni regola di buon gusto e di convenienza ».

[2] La critica moderna è assai severa con Jean de Meun. Gaston Paris giudica l'opera sua « un mostro senza forma precisa, ne' cui fianchi si trovano ammassate tutte le idee e le cognizioni di un'epoca »; anche il Langlois nota « l'incoerenza del piano... l'accumulamento caotico degli elementi piú svariati », e tra i nostri il Novati, in *Freschi e minii del Dugento*, p. 292 sg., dice che Jean è « un troviero, non un poeta », troviero, come tanti ebbe a generarne la Francia in quell'epoca.

Digitized by Google

D'altra parte, se ci rivolgiamo al *Fiore*, eccoci dinanzi a un fatto unico, piú che raro, nella storia delle letterature: a un poeta, che va sulla falsariga di un altro, traducendo spesso alla lettera con cura scrupolosa, e nonostante si mantiene cosí agile e disinvolto, da farci provare, come avvertì il Cian, l'illusione di aver tra mano l'opera originale d'uno dei nostri rimatori satirico-burleschi dell'estremo Dugento.[1] E per maggiore meraviglia, non à già scelto il comodo settenario rispondente al testo francese che traduceva, ma la forma difficile del sonetto, ed è riuscito a cavarne, nel complesso, un capolavoro di armonia e di eleganza, senza lasciarci sentire, né l'impaccio della rima, né la fatica di dividere tutto l'ampio giro della stanza nelle sue quattro parti ben determinate, o di collegarle insieme con maestria: un'impresa insomma che à dell'inverosimile per le immense difficoltà, che doveva superare quella specie di poeta-cireneo, che vi si sarebbe volontariamente sottoposto.

Ma c'è di piú: questo poeta-cireneo, spesso cosí scrupoloso della lettera, avrebbe poi ricalcato e lucidato il testo francese, senza lasciare nel suo rifacimento nemmeno le tracce della lingua del testo, perché infatti la lingua del *Fiore* non è già piena di francesismi, come si è ripetuto fin qui, ma piuttosto di provenzalismi[2]: è anzi una curiosa

[1] V. Cian, *La satira*, nella *Storia dei generi letterari*, edita dal Vallardi, p. 152.

[2] Della lingua del *Fiore* tratterà da par suo il Parodi negli *Studi danteschi* diretti da Michele Barbi. Non so a quali conclusioni sia giunto, o sia per giungere l'illustre critico, ma intanto mi sia permesso di indicare, in una breve nota di semplice saggio, i risultati a cui mi à condotto l'esame del testo.

In generale per la fonetica, pel lessico e per la sintassi, il francese antico risolve un certo numero di casi, e proprio quelli che

Digitized by Google

lingua tosco-provenzale, che a differenza di quella degli altri nostri provenzaleggianti, à tutto il colore di una parlata famigliare a chi seppe servirsene in modo cosí vivo e spontaneo, senza allumacature, senza volute intrusioni, senza falsare la scintillante loquela paesana: è quella lingua ibrida, che doveva suonare sulla bocca dei nostri ingegnosi trafficanti fiorentini, che lasciavano deserte le mogli nel letto pei mercati oltramontani di Francia e specialmente di Provenza.

possono spiegarsi indifferentemente anche col provenzale; il provenzale invece li risolve tutti e senza di esso, in piú luoghi, non è possibile intendere, o sanare il testo.

Forme che si spiegano indifferentemente col provenzale e col francese antico, sono: 1. qualche mutamento di tempo nei verbi: imprendesse = imprenderebbe (son. 153); acordasse (son. 120) = accorderei; intromettesse (102) = intrometterei; osasse (143) = oserei; li fa accorando (107) = li fa accorare; — 2. il mutamento del genere: la pianta (170) = il pianto; comanda (142) = comando; — 3. la soppressione della preposizione *de* in casi come: figlia Cortesia = figlia di Cortesia; — 4. molte desinenze fra cui: Argus e Venus; — 5. l'ipermetria probabile di qualche verso: — Tale il mise il giudicie in sua leggenda (180, v. 7); — 6. l'uso del *pas* (una volta nel son. 104) ecc.

Forme che si spiegano col solo provenzale: — 1. la grafia di molte forme e le rime al son. XXX: difensa, provvedenza e intenza, dalla comune desinenza prov. *ensa;* — 2. l'uso dell'indeterminativo numerale accordato: molta di salute (son. 14), molti d'assempri (son. 162), come *motas de certezas, motas de manieras;* — 3. l'uso particolare del verbo fare: — pregar ti fo = ti prego; ti farà gittar (gitar = andare avanti) = ti gitterà; — 4. l'uso di parole e modi che non ànno né il francese, né l'italiano antico: trabuglia = tríbola; aterminatori = prestatori a termine; enanto = avanti; soffrettoso = povero ecc.

Ecco ora una serie di vocaboli da riferirsi al provenzale, meglio che al francese, tolti come saggio da diverse parti del poemetto:

son. 1 m'abellia = mi piaceva (abelir)
vi trasse = si diresse (trar, rifl.)

Digitized by Google

Da un esame accurato delle particolarità fonetiche, lessicali e sintattiche della lingua del *Fiore,* pochi casi mi sono rimasti, che non abbia potuto riportare al provenzale; di questi pochi, solo un paio o due hanno la loro spiegazione nel francese di Guillaume, di qualche altro ci rende dubbiosi il testo, che è assai corrotto; ma nel complesso parole, frasi, reggimento di verbi, costruzioni e atteggia-

		fredore	= freddo (freidor)
		dottanza	= dubbio (doptansa)
son.	2	aresto	= ritardo (arest)
»	3	balia	= tutela (bailia)
		gaggio	= pegno (gatge)
		fornisca	= compia (fornir)
»	4	impacciato	= preso (empechar)
		doglienza	= dolore (dolensa)
»	5	pacïenza	= pazienza (paciensa)
		voglienza	= voglia, cfr. MISTRAL, *Vocab. prov. moderno* volenci
»	6	restringendo	= accostando (restrenher)
		chitamente	= liberamente, senza fatica (quitamen)
		Schifo	= contegnoso, freddo (esquiu = peu accueillant, Levy, *Dict, prov.*) e sost.: ritegno
»	7	acora	= uccide (acorar)
		certano	= certo (certan)
		Pietanza	= Pietà (Pietansa)
»	9	gittare	= andare avanti (gitar)
		malenanza	= tormento (malenansa)
»	10	gastigava	= riprendeva (castigar)
		grado	= volontà (grat)
.	.	. . . . .	. . . . .
»	27	sospeccione	= sospetto (sospecion)
		baratata	= ingannata (baratar)
		mazone	= muratore (mason)
		mesprigione	= fallo (mespreizon)

Digitized by Google

menti speciali sono a fondo non oitanico, ma occitanico, e ci mettono dinanzi al problema di spiegare, come mai, chi sarebbe stato così spesso traduttore fedele di un testo francese, che avrebbe dovuto avere tutto a mente, per riuscire a fare quello che fece, abbia poi sdegnato, impuro come era nel suo linguaggio, le impurità che gli forniva direttamente il modello.

vicitasse = visitasse (vizitar)
dottosa = incerta (doptos)
son. 28 nel miluogo = nel mezzo (megloc)
dottava = temeva (doptar)

. . . . . .

» 49 aghuglia = ago (agulha)
buglia = allontana (boular)
trabuglia = tribola (MISTRAL, treboulha)
sermonato = detto (sermonar)
intenza = intenzione (intensa)
soferenza = sopportazione (sofrenza)
coragio = cuore (coratge)
» 50 truante = vile (truan)
» 51 impresso = poi (empres)
tenza = lamento, querela (tenza)

. . . . . .

» 59 scondetto = diniego (escondich)
» 60 gagliardo = gaio, sfrontato (galhart)

. . . . . .

» 117 alunga = allontana (alongar)
incaccia = caccia (encausar)
» 120 ribaldia = svergognatezza (rebaudia)
» 131 mante = più d'uno, o d'una (mant)
» 133 pezz'a = è del tempo (pes'a)
» 137 san difesa = senza opposizione (sen defensa)
sagina = possesso (sazina)
marzia (merzia) = ringrazia (merciar)

Digitized by Google

Non piú dunque una difficoltà sola, ma due, scaturite da due parti diverse, e tuttavia confluenti a sollevare lo stesso problema. Ora io ò sempre sentito dire, che nella critica si deve accettare il *caso difficile,* solo quando non ci sia modo di spiegare razionalmente il fatto *col caso facile;* e questa volta, dopo un attento esame, il *caso facile* mi corre agli occhi, quando io sostituisca, non dico a una dimostrazione,

son. 138 nobile (ghirlanda) = magnifica (noble)
» 139 trieva = tregua (treva)
» 140 amendata = assicurata (amendar)
acomandato = affidato raccomandato, (acomandar)
pensata = pensiero, cura (pensada)
» 141 nette = adatte (net)
tramette = invia (trametre)
» 142 comanda (fem.) = comando (comanda)
rifusassi = rifiutassi (refuzar)
sofferria = sopporterebbe (soferre)
engagiassi = dessi in pegno (engatjar)
» 143 pulciella = fanciulla (piusela)
si contese = fece opposizione (se contendre)
» 145 insegniata = ben allevata (ensenhat)
sembra = sembra bene (semblar)
» 146 gente = graziosa (gent)
» 147 tutt'enanto = tutto davanti (tot enant)
disdotto = godimento (desduch)
» 148 folletta = snella, vispa (folet)
finai = regolai il conto (finar)

. . . . . .

. . . . . .

» 152 micianza = combattimento (mesclanza)
» 166 crocando, = cacciando, cfr. MISTRAL, croucá.
» 170 pianta (femm.) = pianto, lamento (planta)
» 171 maleta = borsa (maleta)

Digitized by Google

ché non c'è, ma ad una supposizione nata ieri, l'inversa, cioè che il *Fiore,* è una delle tante fonti di Jean de Meun, da lui seguita, contaminata, imbottita, variata, collo stesso metodo e nella stessa misura usata con tutte le altre fonti, secondo una sua attitudine e abitudine costante.[1]

(attendi) un petitto = un poco (... un petit), nel francese antico si à *un petitet* nel *Roman de la Rose.*

sospecione = sospetto (sospecion)

. . . . . .

son. 192 scuffiava, in senso osceno (escobar, cfr. il romanesco: scopare)

» 203 guarento = protettore (garen)

» 204 comperare = espiare (comprar), cfr. son. 111, v. 13 *comprate* da sostituirsi a *vendute.*

dispettela = ingiuria, torto (cfr. despechamen)

. . . . . .

» 215 infiebolita = affievolita (enfeblir)

ombreare = stare all'ombra (ombrejar)

» 216 apporta = porta (aportar)

visaggio = víso (visatge)

imbraciata = bruciata (enbrazar)

» 228 risposto = risposta (respost)

» 229 di randone = con impeto (de randon)

» 231 (ebi) sovenenza = mi ricordai (sovinensa)

. . . . . .

Quanto ò esposto in questa rapida nota, è appena un saggio e serve solo di rincalzo all'affermazione che la lingua del *Fiore* è provenzaleggiante, con un colorito tutto suo e diversa da quella dell'Alighieri. Essa, insieme con quella del *Detto d'Amore,* di cui si parlerà piú innanzi, rappresenta un periodo un po' più antico: il periodo di Guittone, di Brunetto Latini, di Migliore, ecc.

[1] Jean arriva anzi a confessarlo tranquillamente: — Ge n'i fais riens fors reciter | Se.... quelque parole n'i ajouste, *Roman de la Rose,* ed Michel, n. 16172-4.

Digitized by Google

Un'obiezione seria, che così sulle generali, potrebbe subito muovermi alcuno, cioé che non è ammissibile in un francese di quel tempo la conoscenza del nostro volgare, perché non si sa che il volgare nostro allora in Francia sia stato conosciuto da alcuno, cade da sé, dal momento che Luigi Foscolo Benedetto, à dimostrato a due riprese la sicura relazione di alcuni tratti del *Roman* col *Tesoretto* di Brunetto Latini. Egli si è valso, è vero, della sua dimostrazione per assegnare al *Roman* una data anteriore alla composizione del *Tesoretto*, ma, se questa conclusione, come han sentenziato ad alta voce i competenti, in Francia, in Italia e dappertutto, è errata, resterebbe che Jean abbia conosciuto e si sia servito dell'opera di Brunetto. Le relazioni che correvano allora tra Francia e Italia; i nostri mercanti, specialmente fiorentini, che commerciavano oltralpe; i religiosi, soprattutto francescani e domenicani, che andavano e venivano, esercitando a volte, anche se francesi, importantissimi uffici, e proprio in Toscana; le stesse relazioni estese e frequenti col pontificato romano, che sedette a lungo a Orvieto, a Viterbo, a Perugia e richiamava a sé gente di tutto il mondo cattolico; la venuta di re e principi col seguito di francesi in Italia e a Firenze, dove le arti e le lettere erano in piena fioritura, mi rendono restio ad accettare il diniego assoluto, venisse pure da un oracolo dell'erudizione come il Farinelli, perché dovrei concludere, che tutta questa gente che veniva da noi, non avesse occhi per vedere, o per leggere, né orecchie per ascoltare.

Troppa fretta a trarre illazioni da quello che risulta documentato, a quello che poté essere e fu; né mi si vorrà negare dagli idolatri del documento, che nel nostro caso

[1] Cfr. A. Farinelli, *Dante e la Francia*, I, p. 139.

Digitized by Google

documenti non esistono, per la semplice ragione che un francese, anche se conosceva il nostro volgare, non fosse altro per tradizione e per orgoglio nazionale, non si sarebbe mai adattato a lasciare la sua lingua per la nostra.

Purtroppo la vita di Jean non ci rischiara su questo punto: noi sappiamo a mala pena dove è nato; oscure del tutto le vicende della sua vita e le sue relazioni. Tuttavia conosceva certo l'Italia, tanto che si valse di accenni al nostro paese, viveva a Parigi quando vi si trovavano molti italiani, da Brunetto Latini a Egidio Colonna, che era amante di poesia e in relazione coi fiorentini del dolce stile. E ad ogni modo se Jean conobbe e capí l'opera di Brunetto, non è un'eresia critica l'ammettere, che, o nel testo italiano, o se piú torni, in una traduzione provenzale, o francese, o latina, abbia potuto conoscere, capire e innamorarsi dell'opera di un altro fiorentino, che rinnovava e continuava cosí briosamente le fantasie del suo caro Guillaume.

Ecco dunque da un lato uno sfondo di possibilità, sia pure velato, che tende ad assumere i colori del gericamente probabile, e dall'altro la difficoltà grande di spiegare come Jean ci appaia quasi Giano bifronte, e come l'Anonimo del *Fiore* abbia potuto, traducendo bene spesso alla lettera, snocciolare colla piú grande disinvoltura, in quella lingua tutta sua, piú di duecento sonetti, che non ànno un contorcimento, che non fanno sentire mai la preoccupazione, lo sforzo di chi s'investe della parte altrui, ed elabora *in arcto,* per dirla con Orazio, una materia che non è sua.

* * *

Posta cosí la nuova tesi e chiaritane la legittimità, mi resta ora a portare alcuni argomenti dimostrativi dell'assunto.

Digitized by Google

E in primo luogo, se *Il Fiore* derivasse da tutto il *Roman,* l'Anonimo nel rifarlo, poichè quest'opera, pur appartenendo a due autori diversi, gli si presentava come tutta d'un pezzo,[1] si sarebbe comportato in modo identico, o almeno analogo, rispetto all'una e all'altra parte; ciò che non è. La seconda parte infatti à lunghi tratti con rispondenza strettamente letterale, mentre la prima è riassunta nel *Fiore* con grande libertà nei primi trentadue sonetti, e le rispondenze letterali sono scarse, limitandosi a poche frasi e a qualche verso.[2]

[1] L'analisi sulla diversità dello spirito e dell'arte nelle due parti del *Roman de la Rose* è tutta moderna. Anche il Petrarca nel suo severo, ma giusto giudizio, riferisce l'opera ad uno solo: — Somniat *iste* tamen ecc.

[2] Ecco un raffronto della 1.ª parte, desunto dallo studio del Gorra e verificato sui testi:

Son.	1	riassume i vv.	1689-1890	niente affatto letterale.		
»	2	»	»	1891-1946	»	»	»
»	3	»	»	1987-2008	»	»	»
»	4	»	»	2009-2052	»	»	»
»	5	»	»	2053-2776	»	»	»
»	6	»	»	2779-2954	»	»	»
»	7	»	»	2956-2962	niente affatto letterale e in parte nuovo.		
»	8			nuovo.			
»	9	»	»	2983-3084	niente affatto letterale e in parte diverso.		
»	10	»	»	3085-3107	niente affatto letterale.		
»	11	»	»	3108-3156	la 1.ª quartina e la 1.ª terzina riproducono esattamente il pensiero, non la lettera.		
»	12	»	»	3157-3213	niente affatto letterale.		
»	13	»	»	3258-3296	»	»	»

Digitized by Google

Uno dei passi di questa prima parte, che à rispondenza maggiore, è dato dai vv. 1-6 del sonetto VIII, ma il loro contenuto si trova in Jean, non in Guillaume.

Dice il nostro Anonimo:

Se mastro Arghus che fęcie la nave,
In che Giason andò per lo tosone,
E fecie a conto, regole e ragione
E le diecie figure, com' on save,

Vivesse, gli sarebbe forte e grave
Multiplicar ben ognie mia quistione, [prov. *question* = tortura]
Che Amor mi muove sanza mesprigione, [prov. *mover* = eccitare, dare; *mespreizon* = colpa (mia)]
E di ciascuna porta esso la chiave.

(son. VIII, vv. 1-8, ed. Mazzatinti).

son.	14	riassume i vv.	3297-3328	niente affatto letterale, con aggiunte.
»	15	»	3329-3336	diverso.
»	16	»	3365-3404	lontano ricordo.
»	17	»	4030-4051	un verso o due rispondenti, ma non del tutto.
»	18	»	4152-4089	Abbreviato.
»	19	»	4109-4151	in parte senza riscontro.
»	20	»	4083-4089	ampliato.
»	21	»	4091-4143	Il Gorra dice che qualche verso è tradotto alla lettera; ma esagera; di letterale c'è solo qualche espressione, o al più un verso o due.
»	22			nuovo

Digitized by Google

E Jean, con mossa un po' diversa, ma rispondente:

Se mestre Argus li bien contens
I vosist bien metre ses cures,
Et venist o ses dix figures,
Par quoi tout certifie et nombre,
Si ne péust-il pas le nombre
Des grans contens certifier,
Tant séust bien monteplier.
(vv. 13731-13737 ed. Michel).

Sottilmente guardando, non è difficile capire che il primo di questi due passi è originale e l'altro è copia. Intanto nel poemetto italiano è l'Amante, ossia il poeta, che lagnandosi dei mali che gli procura Amore, e agitato dal dubbio.

son.	23	riassume	i vv.	4210-4246 abbreviato; diverso e nuovo nelle terzine.
»	24	»	»	4241-4272 libera imitazione.
»	25	»	»	4278-4339 libera imitazione e in parte diverso.
»	26	»	»	4346-4375 riproduzione con due versi rispondenti.
»	27	»	»	4406-4410 libera imitazione.
»	28	»	»	4411-4446 libera imitazione e riassunto con aggiunta.
»	29	»	»	4476-4600 libera imitazione, con elementi italiani.
»	30	»	»	4476-4500 libera imitazione.
»	31	»	»	4520-4545 » »
»	32	»	»	4546-4556 » » / 4501-4513 » » con due versi rispondenti.
»	33			nuovo
»	34			»

Digitized by Google

di quel che gli convenga fare, dopo che lo Schifo lo ha villanamente respinto dal giardino dov'è custodito il fiore, ci fa sapere che Amore gli suscita, pur senza sua colpa, tanti dubbi, gli dà tanti tormenti, che non riuscirebbe a noverarli nemmeno Argus [1], l'inventore dell'algoritmo, ossia delle dieci cifre numeriche e del calcolo. Le cifre eran chiamate allora figure, come si può vedere nell'opera del Fibonacci, in cui si parla pure a lungo delle *regulae* e delle *rationes numerorum* per computare (*a conto*). Il linguaggio è dunque qui chiaro e preciso; Jean de Meun invece non solo mette poco opportunamente la citazione in bocca alla Vieille, che sta istruendo Bel-acueil, ma si esprime in modo generico, tantochè non s'intende bene che cosa voglia dire: — Se maestro Argus, quello che conta [o che contava] bene, ci volesse mettere le sue cure e venisse colle sue dieci figure, colle quali tutto accerta e novera, egli non potrebbe davvero accertare il numero delle grandi contese, per quanto sapesse bene moltiplicare. — Questo Argus è un antico, o un moderno; l'artefice della nave, o il mostro dalle cento teste, citato da Jean altrove? E che cos'è quel *moltiplicare* per *accertare?* Jean à l'aria di chi parla per sentito dire.

Con ben altra chiarezza parla l'Anonimo del *Fiore,* pel quale il numero delle torture che gli procura Amore, dei dubbi che gli tormentano l'anima è così grande, che nemmeno quel solenne maestro che inventò l'aritmetica fondata sulle cifre, che noi diciamo arabiche, e che allora attribui-

[1] Da Argo, o Algo facevano derivare la stessa parola Algoritmo, come si può vedere nel *General Trattato di Numeri e Misure* di Nicolò Tartaglia, Venezia MDLVI, sul principio; il Tartaglia attribuisce l'etimologia al Sacrobosco.

Digitized by Google

vano agli Indi (le *figurae Indorum* del Fibonacci), o ai Greci, ci avrebbe saputo combinare una moltiplicazione![1]

E con che mossa spigliata, con che tono tra lo scherzoso e il birichino, tira via il nostro, muovendosi nell'ampio giro delle due quartine, dove gli editori tutti gli han fatto il tiro birbone di chiudergli il concetto principale (vv. 3 e 4) tra parentesi!

E giacché siamo venuti, quasi senza volerlo, alla seconda parte del *Roman*, che è quella che piú ci interessa,

[1] Il passo à, secondo me, importanza non lieve, e mi piace citare alcune parole di un dotto matematico e appassionato studioso delle condizioni della nostra civiltà e della nostra cultura dopo il mille, il prof. Ettore Bortolotti dell'Università di Bologna: — L'istruzione non fu forse in nessun altro luogo cosí diffusa, come allora [sec. XII e XIII] nelle nostre città italiane. La maggior parte dei manoscritti che si conservano nelle biblioteche, è opera di mercanti o di artieri ed i trattati d'abbaco, scritti ad uso dei mercanti, si elevavano fino agli ultimi confini allora raggiunti dalla scienza. Il popolo, che aveva tanta influenza nelle repubbliche democratiche italiane, prendeva vivissima parte al progredire delle arti e delle scienze. Perfino dispute su problemi di matematica si facevano in pubblico e le sfide erano portate dai pubblici banditori. — Ettore Bortolotti, *Italiani scopritori e promotori di teorie algebriche*, in *Annuario della R. Università di Modena*, anno 1918-19, pag. 11 e sgg. dell'estratto.

Il Bortolotti dà pure interessanti notizie intorno alla diffusione dell'abbaco e dell'algoritmo in Italia nel sec. XIII, auspice il gran Fibonacci, purissimo genio della nostra stirpe.

Sull'origine italiana della moderna aritmetica pratica si veda anche quello che scrive il Peacok nella *History of Aritmetic* della *Encyclopædia Metropolitana*, London, 1829, pp. 414, 415: — The Tuscans generally, and the Florentines in particular, whose city was the cradle of the literature and arts of the XIII and XIV cen-

Digitized by Google

e siamo sdrucciolati proprio nel terreno delle rispondenze letterali e delle citazioni, restiamoci un momento per cogliere qua e là dei passi, dove pare evidente che il francese à dinanzi il testo italiano e non sempre riesce ad intenderlo.

Tutti sanno con che crudo realismo sia tratteggiata la Vecchia, figura importantissima, su cui dovremo a suo tempo tornare: essa, esponendo la sua turpe dottrina, ad un certo punto parla cosí a Bellaccoglienza nel *Fiore:*

> Nè non amar già huon che 'n sua beleza
> Si fidi, nè ch' egli a lisciars' intenda:
> In quel cotal non vo' che-ttu t' intenda, [prov. *se entendre en* = desiderare]
> Ma, 'l più che può, da-llu' fa istranezza, [prov. *estranheza*]
> L' uom che si piacie, fa gran scipideza
> E grand' orgoglio, e l' ira di Dio atenda;
> Tale 'l mise il giudicie in sua legienda,
> C' aver non potesse [pote nè?] amor, nè francheza.
> Nè non puote aver cuor di ben amare...
> (son. CLXX, vv. 1-9, ed. Mazzatinti).

Il Castets propose di sostituire al verso settimo, questo: — E Tolomeo già dicie in sua leggenda —, riferendosi alla supposta fonte francese, che à:

turies, were celebrated for their Knowledge of Aritmetic: the method of book-keeping, which is called especially Italian, was invented by them; and the operations of Aritmetic, which were so necessary to the proper conduct of their extensive commerce, appear to have been cultivaded and improved by them with particular care... *the Italians were in familiar possession of Algorithm long before the other nations of Europa.*

Digitized by Google

Et bien gart qu' el n' aint ne ne prise
Nul home de trop grant cointise,
Ne qui de sa biauté se vante;
Car c' est orgoil qui si le tente.
Si s' est en l' ire Dieu boutés
Homs qui se plest, jà n' en doutés;
Car ainsinc le dit Tholomée,
Par qui fu moult science amée:
Tex n' a pooir de bien amer,
Tant a mauvès cuer et amer....
(vv. 14572-14581, ed. Michel).

Ora in nessuna delle opere di Tolomeo si trova una sentenza che faccia lontanamente pensare a questa citazione, e nemmeno il Langlois è riuscito a trovarla.[1] Come si spiega? A me pare che il modo piú semplice sia quello di ammettere una svista di Jean, che, avendo letto nel testo italiano *il giudicie,* credette che si trattasse forse del *De judiciis,*[2] opera di astrologia attribuita nel medioevo per l'appunto a Tolomeo, mentre il *giudicie* del *Fiore* è Guido della Colonna, poeta di grande autorità sul finire del secolo XIII, detto Guido giudice, o anche solo *il Giudice,* come si diceva *il Notaro,* per Giacomo da Lentino.

Infatti Guido della Colonna, nella canzone: — Amor che lungiamente m'à menato — à la sentenza: « Di grand'orgoglio mai ben non avvene », che risponde anche letteralmente al — grand'orgoglio — del sonetto, dove l'accentuazione insolita del verso settimo non è già indizio di lezione errata,

[1] *Origines et sources du Roman de la Rose,* Paris, 1891, pp. 110-111.

[2] Questo è il titolo più antico; più tardi si disse: *Tractatus de iudicandi facultate:* cfr. l' ed. di Parigi, 1663.

Digitized by Google

come parve forse al Castets che lo emendò, ma segno di genuinità, trovandosi nel poema altri casi simili.[1]

Ancora: ai sonetti CIX e CX si hanno due altre citazioni con rispondenza nel testo francese, sulle quali mi trattengo per compiere questa che io credo parte interessantissima del mio esame. Tutto considerato, anche qui abbiamo più esattezza nel poemetto italiano che nel Romanzo. Dice l'Anonimo del *Fiore:*

> Che' n un su' libro dicie Salamone:
> Guardami, Idio, per la tua gran pietade,
> Di gran richeza, e di mendichitade,
> E dami del tu' ben sol per ragione [provenz. *per razon* = moderatamente].

> Ché que' c' a gran richeza, sì oblia
> Que' che 'l criò, per lo suo gran riccore, [prov. *ricor*]
> Di che l'anima mette in mala via.
> Colui cui povertà tiene in dolore,
> Convien che-ssia ladrone, o muor d'envia, [prov. *enveja* = invidia, odio]
> O serà falsonier, o mentitore.
> [son. CIX, v. 5-14 ed. cit.].

E Jean:

> Car Salemons tout au délivre
> Nous a escrit en un sien livre

[1] Accentuazione irregolare sulla quinta sillaba, oppure iato con ipermetria, data dalla parola *giudicie*, che pronunciata alla provenzale, poteva farsi di due sillabe? Cfr. son. XX, v. 4: — Che di gioia [prov. *joi*] perdé quasi la favella; e meglio — Uomini poveri (prov. *paubre*) fatt'ànno lor sire, LXXXV, v. 9; cfr. CXIV, 5, ed. Mazzatinti.

Digitized by Google

Des Paraboles, c'est le titre,
Tout droit ou trentiesme chapitre:
« Garde-moi, Diex, por ta poissance,
De richesce et de mendiance.
Car riches hons, quant il s'adresce
A trop penser à sa richesce,
Tant met son cuer en sa folie,
Que son Créator en oblie.
Cil que mendicité guerroie
De péchié comment le guerroie?
Envis avient qu'il ne soit lierres
Et parjurs, ou Diex est mentierres ».
[vv. 12200-12213, ed. cit.].

Il testo della Bibbia citato dall'uno e dall'altro, dice: — Mendicitatem et divitias ne dederis mihi; tribue tantum victui meo necessaria, ne forte satiatus illiciar ad negandum *Deum...*, aut egestate compulsus furer, et periurem nomen domini.

È una citazione comunissima, uno dei cavalli di battaglia nella grossa questione pro e contro gli ordini mendicanti, di cui si è valso tanto Guglielmo di S. Amore, che S. Tommaso suo avversario, nel famoso opuscolo: *Contra impugnantes Dei cultum* ecc.,[1] e l'uno e l'altro citano il versetto dei *Proverbi,* che è proprio del cap. 30, come dice Jean. Ma, se si toglie questo particolare, non è difficile accorgersi che l'italiano è esatto più del francese, non meno chiaro e molto più spedito.

[1] Si veda il cap. 7 e si confronti coi capp. 14, 15 e 16 dell'altro opuscolo pur famoso e dettato nella stessa circostanza: *Contra retrahentes hom. ab ingressu religionis*: anche qui si cita lo stesso versetto dei *Proverbi* di Salomone.

Digitized by Google

Al nostro assunto si presta bene anche l'altro caso del sonetto CX, dove si cita il Codice di Giustiniano:

> E si difendea 'l buono Giustiziano
> (E questo fecie scriver nella legie)
> Che nesun dia limosina ad uom sano
> Che truovi a guadagniare, e-ttu t'avegie
> Ch'a lavorare e' non vuol metter mano;
> Ma vuol che-ttu il castighi e cacci e fegie.[1]
> (son. CX, v. 9-12, ed. cit.).

E Jean:

> Et si desfent Iustiniens,
> Qui fist nos livres anciens,
> Que nus hons, en nule manière,
> Poissans de cors, son pain ne quière,
> Por qu'il le truisse a graingnier; [gaaingnier, LANGLOIS, *Origines et sources du R. d. l. Rose,* p. 139]
> L'en le devroit miex mehaingnier,
> Ou en faire aperte justice,
> Que soustenir en tel malice.
> (vv. 12268-75, ed. cit.).

Il Langlois (*Origines,* cit. p. 139 e 157) crede che la citazione provenga dal *De periculis novissimorum temporum* di Guglielmo di S. Amore, che dice: — Quod autem non liceat mendicare validis corpore, cautum est expresse in iure humano. C. *De Mendic. validis,* l. unica. —

Ma io trovo che, sulla metà del secolo XIV, un giurista, Luca Della Penna, nel suo commento al *Codice,* avverte: —

[1] *Fegi,* secondo il codice, e non *fegie* come à corretto il Mazzatinti, anche per ragione di rima: *legi, avegi.* In generale le correzioni proposte al testo sono errate, anche perché non si è tenuto conto dell'influsso provenzale; *fegi* per *feggia* = *ferisca.*

Digitized by Google

Item nota quod haec lex consuevit allegari contra religiosos quod non debeant mendicare cum sint fortes, ideo debent laborare et victum in sudore vultus quaerere. Sed Sanctus Thoma de Aquino, in libello quem edidit contra impugnantes Dei cultum et religionem, dicit quod haec lex non loquitur de religiosis et aliis viris utilibus reipublicae, sed de inutilibus, quod satis patet ex hoc verbo *inertibus*. —

Consuevit allegari, dunque non è facile stabilire una fonte diretta, ma è certo che al testo del *Codice* ci richiama meglio l'Anonimo del *Fiore,* specialmente nei due ultimi versi e mezzo, che traducono in breve: eorum quidem quos tenet condicio servilis *proditor studiosus et diligens* dominium consequatur, eorum vero, quos natalium sola libertas prosequatur, *colonatu perpetuo fulciatur,* quisquis huiusmodi lenitudinem prodiderit ac probaverit. *Codex Iustin., De mendicantibus validis,* XI, 26. Tutto sommato, nel *Fiore* c'è rispondenza alla fonte prima e genuina, quanta in Jean, che è poi strano nel modo stesso di citazione: — Iustiniens, qui fist nos livres anciens! —

* * *

All'infuori poi delle citazioni, i passi del Romanzo, o contradittòri, o oscuri, o errati, o inesplicabili, che ànno una loro spiegazione nel non aver bene inteso il testo italiano, sono assai numerosi e vanno dall'errore del senso di un passo, di una parola, di una frase, a quello più generale del significato dei simboli.

Per esempio, il sonetto L à nel Romanzo alcune rispondenze quasi letterali e specialmente la prima terzina:

Digitized by Google

Chol braccio al collo si die hon menare
Il su' nemico, insin che si' al giubetto,
Co le lusinghe, e po' farlo impiccare.
(son. L, vv. 9-12 ed. Mazzatinti).

E Jean:

Le bras au col doit-l'en mener
Son anemi pendre ou noier,
Par chuer, par aplanoier,
S'autrement n'en peut l'en chevir.
(vv. 8174-8177 ed. Michel).

Anche qui il passo è a posto soltanto nel *Fiore,* dove fa parte dei consigli che Amico dà all'Amante per vincere Malabocca, ed è quindi un programma che poi sarà eseguito a puntino. Jean invece riferisce le parole a Gelosia, che nessuno toccherà, e, quel che è peggio, alla Vieille, che sarà invece colmata di doni e a riguardo della quale è già stato dato il consiglio:

La Vieille qui Bel-Acueil garde
Servés....
(vv. 8151-8152 ed. cit.)

E poco più oltre:

Et se vous ne poés doner,
Par promesse estuet sermoner,
Prometés fort sans délaier.
(vv. 8197-8199 ed. Michel).

Ancora: tutti conoscono la famosa quartina del sonetto XCII, passata in proverbio e di cui, secondo un antica tradizione, si sarebbe servito una volta anche Dante:

Digitized by Google

Chi della pelle del monton fasciasse
I' lupo e tra-lle pecore il mettesse,
Credete voi, perchè monton paresse,
Che de le pecore e' non divorasse?[1]
(son. XCVII, vv. 1-4 ed. cit.).

Jean à quasi le stesse parole, se si toglie *Belin* per montone, e *Ysangrin* per lupo, con riferimento, facile per un francese, al *Roman du Renard;* ma c'è un guaio: la comparazione rimane campata in aria, perchè l'autore trascura di riferirla, come è riferita nel *Fiore,* a Falsembiante.

Si dirà che questa volta la mancanza di chiarezza in Jean potrebbe spiegarsi, supponendo uno di quei rapidi trapassi, che lasciano sottintendere quello che non è esplicitamente detto, ma resta tuttavia da vedere, se il fiuto del supposto rifacitore italiano non abbia, in questo e in altri casi analoghi, qualchecosa dell'inverosimile.

È certo poi che spesso avrebbe dell'inverosimile la sua abilità. Ad esempio, i sonetti C, CI, CII, in cui Falsembiante parla di sè e di Costretta-Astinenza con un fare straordinariamente rapido e disinvolto, rispondono quasi letteralmente ai vv. 11949-11956; 11957-11970; 11971-11982, dove si à, più che altro, una enumerazione lunga delle trasformazioni dell'ipocrita; ma è strano trovare nel testo francese riferiti a Falsembiante i mutamenti che l'italiano attribuisce, molto a proposito, a Costretta-Astinenza:

Ella si fa pinzochera e badessa
E monaca e rinchiusa e serviziale [prov. *servisial*]
E fassi sopriora e [cfr., prov. *sobrier*] **prioressa.**

[1] Veramente la tradizione dice che Dante si servì non di questa, ma di un'altra quartina molto simile, che è tal quale in un sonetto di Bindo Bonichi. Ne riparleremo in seguito.

Digitized by Google

Idio sa ben sed ell'è spiritale; [prov. *espirital*]
Altr'or si fa noviza, altr'or professa;
Ma che ehe faccia, non pensa c'a male.
(son. CII, vv. 9-12 ed. cit.).

Ecco ora il testo francese, che io riporto un po'in largo, per farci su qualche considerazione:

Trop sai bien mes habiz changier,
Prendre l'un, et l'autre estrangier,
Or sui chevaliers, or sui moines,
Or sui prélas, or sui chanoines,
Or sui clers, autre ore sui prestres,
Or sui desciples, or sui mestres,
Or chastelains, or forestiers:
Briément, ge suis de tous mestiers.
Or resui princes, or sui pages,
Or sai parler trestous langages,
Autre ore sui viex et chenus,
Or resui jones devenus.
Or sui Robers, or sui Robins,
Or cordeliers, or jacobins.
Si pren por sivre ma compaigne
Qui me solace et acompaigne,
(C'est dame Astenance-Contrainte)
Autre desguiséure mainte,
Si cum il li vient a plésir
Por acomplir le sien désir.
Autre ore vest robe de fame;
Or sui damoisele, or sui dame,
Outre ore sui religieuse,
Or sui rendue, or sui prieuse,
Or sui nonain, or sui abesse,
Or sui novice, or sui professe.
(vv. 11957-11981, ed. cit.).

Digitized by Google

Si notino intanto i due versi di rispondenza letterale l'uno introduttivo: — I' si so ben per cuor ognie linguaggio, — e l'altro conclusivo del son. CI: — A brieve motti, i' son d'ogni mestiere —, che il francese à trasposto fuor di luogo, l'uno e l'altro per attrazione della rima *forestiers,* e *pages.* Inoltre che valore à quel *Briément,* che traduce l'*A brievi motti* dell'ultimo verso del sonetto italiano, se l'enumerazione dovrà continuare per altri diciotto versi? E che cosa vuol dire: — Or sai parler trestous langages, — se è evidente che Falsembiante li deve saper parlare non *talora,* ma *sempre,* e non solo saperli parlare, ma saperli *per cuore* (son. CI, v. 1),[1] come dice l'Anonimo del *Fiore,* che mette in risalto la falsità della lingua e quindi dell'anima, prima di quella dell'abito?

Di più non si capisce che cosa diventi Costretta-Astinenza, quando Falsembiante per seguirla, si fa damigella, e dama, religiosa, novizia e badessa!

Io, per mio conto, non saprei trarre di qui altra conclusione che quella che mi vietasse di credere ancora che i sonetti CI e CII, cosí agili e perfetti, siano stati raffazzonati, quasi alla lettera, su di un testo, che porta invece abbastanza chiari i segni di essere non l'originale, ma la copia contraffatta.

Un altro passo che ci fa vedere come Jean, andando sulla falsariga del testo italiano, incespica maledettamente, è la famosa terzina, in cui Amore, parlando ai Baroni radunati per abbattere il castello di Gelosia, esclama:

> Ché pur convien ch' i' soccorra Durante,
> Chéd i' gli vo' tener sua promessione, [prov. *promesion*]
> Chè troppo l' ò trovato fin amante.
> (son. LXXXII, vv. 9-11).

[1] *Per cor* = a mente, è modo tuttora vivo anche nel provenzale moderno: cfr. il Vocabolario del Mistral, alla voce.

Digitized by Google

E Jean:

Vès-ci Guillaume de Lorris,
Cui Jalousie, sa contraire,
Fait tant d'angoisse et de mal traire,
Qu' il est en péril de morir,
Se je ne pens du secorir.
. . . . . .
Si seroit-ce moult grant domage
Se si loial serjant perdoie,
Com secorre le puisse et doie;
Qu' il m'a si loiaument servi . . . .
(vv. 11291-11306, ed. Michel).

Chi sa dire come s'accordi, questa patente di assoluta fedeltà data a Guillaume, col fatto che egli aveva lasciato il Romanzo in tronco, prima che Ragione tornasse? Infatti Amore tien conto del rifiuto opposto da lui a Ragione, *la chétive, la recréue,* ed è appunto per questo che soccorre

. . . . Guillaume
Qui si bien s'est vers *lui* portés
(vv. 11423-24).

Anche qui traspare il riverbero del testo italiano: non è Durante che si è nominato al posto di Guillaume de Lorris, ma Guillaume, che Jean à introdotto là dove figurava il nome italiano, vero o allegorico che sia. E al tempo stesso, perchè non restasse ignoto che lo scrittore non era Guillaume, ma proprio lui, à dovuto aggiungere quella curiosa esibizione di sè, parlando con fare un po'giullaresco di Jean Clopinel (o Chopinel, secondo il Langlois): —

Digitized by Google

Qui nestra sor Loire, a Méun, . . .
Cis aura le Roman si chier
Qu' il le vodra tout parfenir . . .

ed à cura di indicarci perfino l'ultimo verso del suo predecessore, che è dato per morto da più di quarant'anni!

Come abbiano potuto i cronologisti fissare delle date per la composizione della seconda parte del *Roman*, dopo l'incertezza in cui ci mette il non sapere, se l'azione debba intendersi contemporanea a Jean, che è ancora da nascere (qui est à naistre, v. 11383), o a Guillaume, prima che morisse, io non sono riuscito ancora a intenderlo. Certo qui bisogna prendere le cose un po' all'ingrosso, perché si sente che il troviero francese è in vena di scherzare; ma, tornando al nostro ragionamento, io non so trovare il movente di tutto il lungo tratto, dove Chopinel dopo aver già scritti più di seimila versi, parla di sè per la prima volta a quel modo, se non pensando al desiderio che egli aveva di rendere onore a Guillaume col nominarlo al posto del Durante italiano, e di far sapere allo stesso tempo che il continuatore francese era lui; lui che avrebbe ricantato le parole d'Amore: — Par quarrefours et par escoles | **Selonc le langage de France!**

* * *

Potrei trattenermi su moltissimi casi, in cui l'errore di Jean può dipendere dal non aver capito la lettera del *Fiore;* ma poichè, la tirannia dello spazio me lo vieta, passo senz'altro all'esame dell'allegoria e dei simboli: anche questi nel poemetto italiano sono genuini e coerenti, in Jean falsati e contaminati.

Digitized by Google

Infatti il *Fiore,* io non lo so concepire che come una novella boccaccesca sotto un'elegante veste poetica e allegorica, nella quale si può rintracciare il velo e il vero, come nella *Divina Commedia,* benchè in forma più semplice. Il vero è il racconto nudo, l'azione reale, che il poeta à cura di determinare nel tempo e nel luogo.

Un amante, nel mese di gennaio, in Provenza, si innamora di una bella fanciulla, e saldo nei suoi propositi (*Durante*), sordo ai prudenti consigli di *Ragione,* riceve da *Amore,* come premio della sua fedeltà, gli aiuti per conquistare l'amica del suo cuore (*Bellaccoglienza*) e rapirle il *flos virginitatis* (*Il Fiore*). Le cose non vanno liscie come sperava; le male lingue cominciano a sparlare e a mettere in piazza la tresca (*Malabocca*); Bellaccoglienza intanto è rinchiusa in una torre e data in custodia a una *Vecchia.* Allora l'Amante, non sapendo che partito pigliare, ricorre per consiglio ad un amico (*Amico*), che gli dice come si fa per conquistare le donne, che sono tutte venali (**ars amandi** maschile). Per vincere non c'è che una strada: quella di ricorrere a tutti i mezzi, anche all'inganno e al tradimento.

L'Amante, un po' restio a servirsi di queste male arti, tenta per suo conto, se possa arrivarci col danaro; ma, povero com'è, non approda a nulla. Sennonchè, valendosi dell'opera di due ipocriti, un frate ed una monaca, riesce a far tacere le male lingue, che lo avevano fatto allontanare (*Malabocca*), ed elude la custodia dei parenti (*Gelosia*), corrompendo la Vecchia, a cui è stata data da guardare la fanciulla, e che prepara il terreno (**ars amandi** femminile). L'Amante tuttavia non raggiunge l'intento, finchè la fanciulla non si trova nelle condizioni adatte per cedere meglio all'istinto sensuale (*Venere*). Allora, non serbando più essa, nè ritegno (*Schifo*), nè *vergogna*, nè *paura*, cede all'amante *franco* ed *ardito*, che ne fa ripetutamente quello che vuole.

Digitized by Google

Il racconto, crudamente sensuale, svolge un tema comune ad altri nostri rimatori del Dugento, cioè, che in amore chi la dura (*Durante*) la vince, e si chiude coi ringraziamenti dell'Amante ad Amore e Venere e agli altri che lo hanno aiutato nella bella impresa.

L'allegoria, che investe questa trama, è da cima a fondo molto chiara, appropriata ed elegantissima.

Tutti i personaggi che entrano in azione, sono altrettanti simboli, ed hanno un loro atteggiamento, una loro breve figurazione, rispondente alla semplicità del loro significato.

Ora dei simboli, di cui il nostro Anonimo si vale con straordinaria maestria, comincio coll'analizzare quello che tutti ritengono la figura centrale e che à in sè più spiccati i caratteri dell'allegoria, cioè Falsembiante.

È stato detto che Falsembiante nel *Roman de la Rose* è una trovata geniale e serve mirabilmente a un intento satirico. Sia pure; ma quando mai Jean De Meun, che ne sarebbe l'inventore, ci à saputo indicare il significato fondamentale che esso à nell'azione? Le parole del sonetto LXIX:

> **Malabocca che così ti travaglia**
> **È traditor: chi 'l tradiscie non erra;**
> **Chi con falsi senbianti no-ll'aferra,**
> **Il su' buon giocho mett' a ripentaglia....**

non hanno riscontro nel troviero francese, che è anche qui indeterminato, contraddittorio e assurdo.

Le contradizioni cominciano alle prime battute. Falsembiante, figlio di Baratto e d'Ipocrisia è presentato come uno dei valletti d'Anticristo (Ge sui des valez Antecrist,

Digitized by Google

v. 12652), ma più innanzi Jean, dimentica questa parentela e ci dice che è padre dell'Anticristo, il quale dovrà appunto nascere da lui e da Costretta-Astinenza. Questa è un'aggiunta contraditoria che non figura nel *Fiore* (cfr. s. CXXII), ma che si potrebbe spiegare, supponendo al solito una opportuna eliminazione fatta dall'accorto rifacitore italiano.

Nel Romanzo però Falsembiante non entra in iscena a tutta prima come un religioso: la sua figura incerta si determina in seguito, quando l'Autore à avuto tempo di fare la sua dichiarazione di ortodossia, protestando che egli non si è mai sognato di voler dir male dei religiosi e che intende di essere fedele a Santa madre Chiesa.

Soltanto allora Jean comincia a delinearci due religiosi, e la satira dell'ipocrisia in genere diventa la satira degli ordini mendicanti.

Nel *Fiore* invece Falsembiante ci è presentato subito, per quel che è, calzato e vestito da frate:

> **Perch' i' la mia malizia mi ripognia [prov. *repondre* = celare]**
> **Vest' io la roba del buon frate Alberto ;**
> **Ch' i' tal roba e' non teme mai vergognia.**
> **(son. LXXXVIII, vv. 12-14, ed. Mazzatinti).**

Queste sono le prime fila dell'ordito, che si riallacciano così bene alle ultime:

> **Falsosenbiante, sì com' on di coro**
> **Religïoso e di santa vita,**
> **S'aparechiò e si avea vestita**
> **La robo (?) frate Alberto d'Agimoro.**
> **(son. CXXX v. 1-4, ed. cit.).**

Digitized by Google

La figura di Falsembiante qui balza fuori viva fin dal principio per compiersi mirabilmente in seguito, e anche il simbolo è chiarissimo; mentre nel Romanzo manca d'unità e di coerenza, tanto che l'Autore, facendolo parlare, nella sua seconda veste di rappresentante degli ordini mendicanti, non si è sempre ricordato di dover dimenticare se stesso: non è riuscito insomma a immedesimarsi in una creatura, che non aveva ideata, ma presa a prestito da altri, sia pure con compiacenza.

Cosí si spiega come egli scatti dall'ombra e lanci per conto suo qualche grido, come al v. 11816: — Par mon chief! il en istra maus —, che non può essere attribuito ragionevolmente a Faulx-Semblant. Il quale, in persona di Jean, arriverà a dire di voler piuttosto affrontare la morte, la prigionia e l'esiglio, che tacere la verità (vv. 12424-33); mentre nel *Fiore* si vanta spudoratamente di voler ad ogni costo raccontare ogni suo delitto (son. CXIX, v. 2), ogni sua ribalderia, anche se gliene dovesse venire quel male che lui à fatto ad altri: è il delinquente, che con sarcastica improntitudine si gloria dello strazio delle sue vittime innocenti e parla alto de' suoi misfatti, sicuro dell'impunità!

Eppure con che disinvoltura burlona sa servirsi di questo figuro l'Amante, che è poi lo stesso poeta, per raggiungere l'intento! Mentre per Jean, Falx-Semblant, come la Vieille, sono in fondo anime abbiette, tanto che non può trattenersi dal lanciar contro di loro qualche grido di esecrazione, l'Anonimo del *Fiore*, coerente nella sua scettica e spregiudicata anima di libertino, non mostra, nè per l'uno, nè per l'altra, avversione di sorta. All'Amico dichiara bensí che la via dell'inganno e del tradimento non gli piace (son. LXX), ma quando s'accorge che altro mezzo non c'è, vi s'adatta come se nulla fosse, e le imprecazioni le lancia e le fa lan-

Digitized by Google

ciare non già alla Vecchia e a Falsembiante, ma a Malabocca e a Gelosia, che gli attraversano il passo.

Dato questo stato d'animo del poeta, s'intende come nel *Fiore* Falsembiante non possa prestarsi a esprimere una qualunque serietà d'intenti in chi lo à raffigurato. Certo questo inquisitore feroce, questo carnefice dei Patarini, questo vagabondo, truffatore e mezzano[1] non è messo alla pari degli ecclesiastici Guglielmo di S. Amore e Sigieri, che furono del resto ribelli; ma verso Dio, il culto, la Chiesa, le cose sacre, il papa, e specialmente verso i frati mendicanti, l'Anonimo poeta non mostra che disprezzo; quindi un Falsembiante che stia a rappresentare, nel tono serio della satira, certi intendimenti elevati di chi lo concepí a quel modo, io non arrivo a capirlo.

Quando Jean à voluto esprimere di suo intendimenti seri, à dovuto, nelle sue aggiunte mettere in bocca a Faulx-Semblant l'assurdo, come nel caso accennato sopra, o nell'altro, dove lo fa parlare con entusiasmo dell'Università parigina, non pensando che le parole sono pronunciate da un avversario accanito!

Anche qui dunque, mentre da un lato, seguendo la nostra tesi, ci riesce più facile spiegare nel *Fiore* l'unità e la coerenza della figura di Falsembiante, ammettendo che il poeta l'abbia creata nella piena libertà della sua fantasia, dall'altro abbiamo tanto per credere, che il poeta francese non ideava di suo, ma cuciva a un vecchio tessuto nuovi suoi panni e tutti di marca francese, come la lunga digressione sulla confessione e l'altra sulle lotte alla Sorbona.

L'avversione acre, decisa, implacabile che nel *Fiore* prorompe verso i frati che son finti, verso la chiesa che

[1] Divinatore; son. CXXXIV, v. 10; cfr. il provenzale *devinador*.

Digitized by Google

lascia correre il male, verso il Pontefice che dà falsi privilegi, e in generale lo scherno alle cose sacre e a Dio, che l'Autore nomina con riso beffardo, è nel Romanzo così travisata, che non si riconosce più.

Jean protesta di non aver mai avuto intenzione:

> De parler contre home vivant
> Sainte religion sivant (v. 16191, sg.);

e non è vera l'affermazione del Benedetto, che il concetto d'ipocrisia venga in lui a immedesimarsi con quello di religioso; egli anzi prende soltanto di mira alcuni religiosi che sono ipocriti, o, se si vuole, gl'ipocriti che si fanno religiosi, e la sua satira si riduce a poco piú che una protesta in favore del clero francese e contro il celibato, protesta che non era certo una novità sulla fine del duecento.

Del resto s'è già accennato che Jean parla di cose religiose nella maniera più ortodossa e più devota; rispetta la Chiesa (vv. 7493-4), risolve questioni teologiche secondo la dottrina scolastica, e protesta di esser disposto, come qualunque buon credente, a fare ammenda di quello che à detto non conforme agli insegnamenti ortodossi (vv. 16237-40):

> Et s'il i a nule parole
> Que sainte Eglise tiengne à fole,
> Prest sui q'à son voloir l'emende,
> Si ge puis sofire à l'emende.

Dunque veleno e contravveleno: il veleno egli ebbe la sorte di trovarlo in un'urna di lucente cristallo, che gli piacque; obbedendo poi al suo istinto di troviero vivace, addottrinato e rumoroso, travasò il liquore in un otre gigan-

Digitized by Google

tesco, vi aggiunse acqua e miscela, stillandola dalle fonti più disparate, e gli fece cambiare colore e sapore, perchè si tracannasse meglio in tempi proibiti.

E così Falsembiante tra le sue mani cambiò perfino di abito: da frate Alberto si trasformò in *frère Sohier,* forse quel Sigieri turbolento e ribelle, che diede tante noie al rettore dell'Università Alberico di Reims; egli allargò l'accenno alle lotte fra i dottori di Parigi e da buon francese prese a difendere a lungo i privilegi del suo clero, avverso all'invadenza degli ordini mendicanti, che in Francia volevano insegnare e confessare. Intanto non s'avvide che la sua creatura d'accatto perdeva, insieme colla fisonomia originale, quei segni di persona determinata, assunta all'ufficio di simbolo, di cui si riveste nel *Fiore.*

Perchè nel *Fiore* Falsembiante è uomo di coro (son. 130), è mastro divino, cioè insegnante di teologia (son. 105 e 131), à alle sue dipendenze altri mastri divini, cioè è caposcuola (son. 126), è predicatore (s. 103), sa indovinare le cose segrete (son. 105) e si può vantare di avere l'amicizia del re di Francia, e di pesare a sua bilancia tutto il mondo (son. 105, 106); à fatto guerra contro *buoni mastri divini,* cioè dottori in teologia come lui, che a Parigi disputavano contro i frati francescani e domenicani; à fatto esiliare Guglielmo di S. Amore e morire Sigieri (son. 92 e 109).

Questi dati così precisi non credo che siano messi a caso, come non scrisse a caso il continuatore di Martino di Troppau nella *Cronica brabantina*: — Huius temporis floruit Albertus de ordine Predicatorum, doctrina et scientia mirabilis, qui magistrum Sygerium in scriptis suis multum redarguit. Qui Sigerius, natione brabantinus, eo quod quasdam opiniones contra fidem tenuerat, Parisiis subsistere non valens, Ro-

Digitized by Google

manam curiam adiit, ibique post parvum tempus a clerico suo quasi dementi perfossus, periit.

Alberto d'Agimoro [o Lagingoro?] del *Fiore* potrebbe dunque identificarsi con Aberto di Laugingen [Lagingorius?] domenicano, insegnante di teologia, caposcuola a Parigi, dove ebbe discepoli fedelissimi, a cui si attribuiva il *De secretis mulierum,* che ebbe autorità alla corte dei re di Francia insieme con san Tommaso, e un potere straordinario nell'ordine suo e nella curia romana, che mosse guerra, insieme collo stesso san Tommaso, ai detrattori dell'ordine suo e di quello di san Francesco, che scriveva parole di fuoco contro gli eretici [1] e non fu estraneo, nè alla condanna di Guglielmo di S. Amore, nè a quella di Sigieri.

* * *

Del resto sia Falsembiante in veste di persona determinata, o no, le premesse per la nostra conclusione non cambiano, e possono trovare dei rincalzi da tutti i lati.

C'è, ad esempio, una lunga serie di contradizioni nel Romanzo, di cui nel *Fiore* non appare ombra: ora è più facile, anche qui, spiegare il fatto, supponendo che l'Anonimo italiano abbia ripreso e sviluppato liberamente di suo la trama incominciata da Guillaume, che ostinandosi nell'idea di un rifacimento.

Così a Dangier, Honte e Paor è data da Jean una torre da custodire, una di quelle che muniscono la cinta del castello fatto fabbricare da Gelosia per rinchiudervi Bel-acueil,

[1] « De plaga *haereticorum* maius gaudium erit Sanctis », *In Apoc.*, Tomo XI, ed. Jammy, p. 122, col. 2.

Digitized by Google

ma il poeta si scorda in seguito di quest'ufficio, che è stato loro affidato, e li fa combattere a lungo contro Pitié, Franchise, Bien-Celer, Délis, Hardemens e Séurté: dove è andata l'allegoria della Fortezza, esclama il Benedetto?[1]

Si può rispondere, che è andata dove vanno a finire tutte le cose che, nell'inerzia dello spirito non adatto all'opera creativa, si prendono d'accatto: allora nessun elemento è più necessario, perchè il bisogno della coerenza non è sentito.

Di qui avviene che Jean cammini diritto e rapido solo quando segue la sua guida, che è sicura. Quando se ne scosta, va a sbalzi, ed è capace, ad esempio, di tralasciare che i Portieri mossero contro l'Amant, senza legare la donna:

> Allor Bellacoglienza fu fermata, [prov. *fermar* = assicurare]
> Da questi tre portier sotto tre porte,
> E con una catena molto forte,
> Quella gientil ebbero incatenata.
> Po' corser sopra me quella brigata...
> (son. CCV, vv. 1-5 ed. cit.).

Per compenso l'errabondo troviero aggiunge la preghiera che l'Amant, dopo aver preso le busse, fa ai Portieri perchè si degnino accoglierlo celatamente dentro la torre, (vv. 15880 sgg.); cosa che è in forte contrasto colla concezione di Bel-acueil, dei Portiers, dell'Amant e dell'assalto finale.

Altra contaminazione assurda è quella che riguarda Gelosia, che Jean sdoppia, introducendo il Jaloux: infatti Gélo-

[1] Così Luigi Foscolo Benedetto, *op. cit.*, pag. 33; — ... chi si ricorda, nella lotta di Dangier, Honte, Paor contro i loro nemici, che ciascuno di quelli à una sua torre da custodire? L'allegoria della Fortezza dove è andata? —

Digitized by Google

sia simboleggia non già la sorveglianza del marito, perchè Bellaccoglienza è fanciulla, ma quella dei famigliari e non si spiega la comparsa del Jaloux, se non ammettendo un travimento nel significato del simbolo.

È da avvertire poi che, come questa, tutte le altre numerose aggiunte di Jean, hanno sempre un loro segno di riconoscimento. Così la figura di Ragione da cui Guillaume « aveva già cavato tutto quello che se ne poteva cavare », come dice il Benedetto,[1] è introdotta di nuovo da Jean, che ripete, peggiorandolo, un precedente motivo. Ragione diventa questa volta « terribilmente prolissa e dilaga in ragionamenti stucchevoli e interminabili », tanto da perdere ogni collegamento col resto dell'opera e da cadere « nel ridicolo e nel grottesco ».

Anche di questo non c'è traccia nel *Fiore*. Qui Ragione non solo torna a tempo opportuno, ma consiglia l'Amante a seguir lei e a lasciare Amore con un discorsetto rapido, senza inopportuni sbandamenti, a botta e risposta, che si chiude col sorriso deliziosamente beffardo del poeta amante:

> Donna tua lezione
> Sie cierta ch'ella m'è poco valuta.
> . . . . . .
> Chéd i' so la lezion tratutta a mente
> Pe' ripetall' a giente chu' piacesse,
> Ma già per me nonn à savia nïente:
> Che fermo son, se morir ne dovesse,
> D'amar il fior...
> (son. XLVI, vv. 2 sgg., ed. cit.).

Il francese, al solito, à sciupato il modello con una scor-

[1] L. F. Benedetto, *op. cit.*, p. 45.

Digitized by Google

ribanda dottrinale e moraleggiante, che contraddice alla natura del racconto.

Come infatti non sentire la contaminazione di due elementi eterogenei in quell'Amant dal fare impacciato e pedantesco, che incalza con domande Ragione, perché gli esponga una teorica dottrinale, e la prega a schiena curvata (et d'ensegner moi vous penés, v. 6205), per poi finire con quel sorriso beffardo, che è atteggiamento costante, vita coerente nell'Amante del *Fiore?*

* * *

Par chiaro dunque che Jean de Meun, entrato come padrone nell'elegante edificio eretto dall'Anonimo italiano, vi butta tutto a soqquadro. E non c'è si può dire passo, dove non si colga in fallo, non c'è soprastruttura che non lasci apparire evidenti i punti d'attacco tra il vecchio e il nuovo, non c'è modificazione che non porti le tracce di una mente spensierata e facilona, di una vivacità che « rasenta la sfacciataggine e la provocazione ».[1]

Tutti sanno, ad esempio, che in Guillaume la *Rosa* è il simbolo della fanciulla amata e Bel-Acueil niente altro che una maniera d'essere, uno stato d'animo della fanciulla stessa.[2]

L'Anonimo del *Fiore* nel suo liberissimo riassunto, che, come si è detto, si estende pei primi trentadue sonetti, à cambiato il senso dei simboli della rosa e di Bellaccoglienza,

[1] Novati, *Freschi e minii del Dugento,* cit., pag. 292.

[2] Novati, *ibid.,* p. 285.

Digitized by Google

per modo che questa stesse ad indicare la donna, e il fiore... quella tal cosa che non occorre dire con parola aperta.

Quando dunque la Vecchia pollastriera insegna a Bellaccoglienza il miglior modo per cedere con profitto il fiore all'Amante, e anche mamma Cortesia la esorta a non far la ritrosa con un giovanotto cosí bello e galante, noi intendiamo senza fatica la sfacciata dottrina.

Ma Jean de Meun, che si trovava a dover continuare il testo di Guillaume, non avrebbe potuto servirsi di questa parte del *Fiore* senza cadere nell'assurdo.

E c'è caduto! Obbedendo senz'altro alla sua faciloneria, non si è dato cura di cambiare, e di qui è nata la stranezza che l'Amante « s'intrattenga sempre con un valletto gaio ed avvenente, e che a questo valletto, il quale per quanto gaio e avvenente, non è perciò meno un uomo, la vecchia custode insegni, mentre geme prigioniero nella torre, tutte le arti con cui le donne avvedute sogliono guadagnarsi, conservare e spennare gli avventori »[1]!

Cosí una parte dell'elegantissimo edificio italiano, trasportato di peso nell'enorme costruzione francese, non vi si adatta e provoca l'assurdo.

Altrove Jean aggiunge di suo una soprastruttura, che, quando non è assurda, lascia pur sempre trasparire i punti di attacco tra il vecchio e il nuovo.

Tra queste soprastrutture la piú vistosa è costituita dall'episodio di Natura e Génius.

È noto che l'episodio, lunghissimo, si estende dal v. 16827 fino al v. 21637, (Et quant ce serement fait orent... C'onque ne sorent qu'il devint, ediz. Michel), ed è cosí staccato da tutto il resto che, recidendolo, non se ne à il mi-

[1] Novati, *ibid.*, p. 285.

Digitized by Google

nimo inconveniente. Siamo al punto dell'azione in cui i Baroni dell'oste ànno giurato ad Amore, che li à convocati, di dare l'assalto al castello di Gelosia e di abbatterlo: essi, soddisfatti della nuova forma di giuramento, prestato non già posando le mani su cose sacre, ma su le stesse armi, tentano un assalto che fallisce. Allora Amore manda a chiamare Venere, che dopo poco arriva sdegnata e pronta a dar fuoco al castello.... che infatti è da lei incendiato.

Al posto dei puntini Jean introduce un episodio di cinquemila versi, incoerente e contradittorio. Ora, pur concedendo alla natura del poeta, che volentieri sonnecchia, è ben difficile rendersi ragione del come egli abbia potuto, sviluppando una trama di suo, contradire a quello che è essenziale allo svolgimento del racconto.

Amore che è venuto in soccorso dell'Amante, ridotto a mal partito dopo l'imprigionamento di Bel-acueil, si trova, nonostante che abbia tutti i suoi Baroni, decisi alla lotta, in un momento quasi disperato. I Portieri del castello, pur giacendo strangolato Malabocca pel felice intervento di Falsembiante e di Costretta-Astinenza, lottano disperatamente alla difesa e gli assalitori sono ricacciati, talché bisogna pattuire una tregua. In questo frangente Amore pensa di mandare Franchezza a Venere sua madre, per ottenerne l'aiuto potente. Si noti che Jean assai prima, per bocca dei Baroni, ci ha fatto sapere che l'aiuto di Venere è necessario e decisivo:

> Mès que Vénus i soit présente...
> Ne sans li n'iert ce jà parfait
> Ne par parole, ne par fait....
> (vv. 11507 sgg. ed. cit.);

Digitized by Google

e altrove celebra, sempre sulla falsariga del *Fiore,* la potenza di Venere così:

> « Par foi, ce dist Vénus, mal tint
> Ialousie chastel ne case
> Contre mon fiz· Se tout n'embrase
> Les portiers et tout lor ator,
> Ou les clez rendront de la tor,
> Ge ne doi prisier un landon
> Moi, ne mon arc ne mon brandon.
> (vv. 16707-16713).

E poco piú oltre

> Mal mort, dit-ele m' acore,
> Qui tantost me puist acorer
> Se ge jamès lais demorer
> Chastéé en fame vivant...
> (vv. 16765 sgg.).

Ma ecco invece tutto ad un tratto, proprio nel colmo della lotta, Venus è messa in disparte, come se di lei non si fosse mai parlato, ed entrano in ballo Natura e Génius: due figure nuove, che si perdono tra i vapori di lunghe digressioni dottrinali e moraleggianti. Tutto l'episodio è preso da Alano e rabberciato alla meglio, come à definito la sapiente critica del Langlois, di cui mi piace qui citare le precise parole: — Jean commence per nous montrer Nature dans sa forge, travaillant à la reproductions des espèces: c'est une imitation d'Alain; il compare les œuvres de l'Art à celles de la Nature et dit un mot de l'Alchimie: ce passage n'est pas d'Alain, mais il se rattache intimement au précédent. Il essait ensuite de faire le portrait de Nature et à l'instar d'Alain, nous la montre regrettant d'avoir créé

Digitized by Google

l'homme, qui transgresse ses lois et s'en confessant comme d'une faute à son chepelain. Génius avant d'entendre sa confession, lui conseille de garder son sang-froid, au lieu de s'emporter, comme le font si souvent les femmes; et, à ce propos, il fait contre la beau sexe une satire de quatre cent vers, *absolument en déhors du sujet.* Nature commence enfin sa confession et fait un exposé des connaissance cosmogoniques, métaphysique, astronomiques, etc., de Jean de Meun, empruntées à Alain, à Boèce, à Macrobe, Aristote, Platon, Chalcidius, etc., et termine en se plaignant comme dans le *De Planctu,* de l'homme qui, seul de tous les êtres créés, n'observe pas ses lois. Génius la console, puis revêt les habits pontificaux, et, en presence de l'armée d'Amour, fulmine, toujours comme dans le *De Planctu,* un anathème terrible contre ceux qui ne suivent pas les lois naturelles de l'amour.[1]

Ho controllato, diligentemente il *toujours comme dans la Planctu* e l'ò trovato giustissimo. Le parti dottrinali, o dichiarative, indipendenti da Alano, di cui il Langlois ricerca le fonti con tanta dottrina, possono, secondo me, essere anche segno di un sapere alla mano; ma comunque stia la cosa, a noi importa aver sentito dalla bocca stessa di uno de' più dotti ammiratori del *Roman,* che la voce di Jean è anche qui stonata, e alle contradizioni da lui messe in chiaro, si aggiunge ora quella fondamentale di non aver capito che l'intervento di Venere era, per la concezione stessa del racconto, decisivo. L'Anonimo italiano infatti lo afferma fin dal principio, con queste parole, messe in bocca a Gelosia, che dice di Bellaccoglienza:

[1] LANGLOIS, *Origines, cit.,* p. 149.

Digitized by Google

... se Venus ancor la vicitasse, [prov. *vezitar*]
Di ciò era ciertana e non dottosa, [prov. *certan, doptos*]
Che converrebe ch'ella il fior donasse.
(son. XXVII, vv. 11-14 ed. cit.).[1]

Inoltre, nonostante le abitudini scapestrate del troviero francese, è per lo meno forte a pensare, che sia farina dello stesso sacco il disprezzo per Raison e la lode suprema alla ragione stessa, dei vv. 19807 sgg.; la concezione profana e impudica di tutto il racconto e il ricordo della passione di Cristo, della giustizia divina, delle pene dell'inferno (vv. 20015 sgg.), fatta sul serio da Nature, che conclude; gli altri peccati li punirà Iddio, a questi di cui si lamenta Amore ci penso io!

Ma quando mai se n'è lamentato Amore? Nature entra da sè, come un *deus ex machina,* quando ode il giuramento dei Baroni, decisi alla conquista:

Quan ele oï ce serement
Moult li fu grand alègement,
Du grant duel qu'ele démenoit.
Par décéue se tenoit...
(v. 17185 sgg., cfr. v. 16827 sgg.).

[1] Secondo il Gorra questo sonetto, che non è de' più belli, ma al solito assai spigliato, deriverebbe da quattro parti diverse del *Roman*: la prima quartina dai vv. 4406-10, la seconda dai vv. 4219-37, la prima terzina dai vv. 13888-13899, con rispondenza letterale, la seconda dai vv. 11507-11511. Si pensi alla difficoltà enorme, se non insuperabile, di accostare parti così staccate e chiuderle con arte nel giro di un sonetto. La nostra tesi è, anche da questo punto di vista, semplificatrice e ci libera da un assurdo estetico.

Digitized by Google

***

E il punto d'attacco tra il vecchio e il nuovo, la saldatura, come si dice, è evidente qui, come in tutti i casi in cui Jean à interposto materia nuova.

Evidentissima poi quella tra l'opera precedente di Guillaume e la continuazione sua, dove egli à dovuto accomodare le cose alla meglio per servirsi del racconto già unificato e colorito nel *Fiore*.

Infatti la saldatura tra la prima e la seconda parte del *Roman* comincia al v. 4570 e va fino al 4831, senza che appaia traccia del *Fiore*.

In esso il poeta italiano, dopo aver esaurito nei primi trentadue sonetti un libero riassunto del racconto del Guillaume, à, nei sonetti XXXIII e XXXIV, degli accenti così personali e determinati, che non potevano essere travasati da chi si fosse messo in mente di continuare il racconto francese. Nel testo italiano infatti il poeta, riassumendo e modificando, aveva già tracciata una sua via.

Chiusa Bellaccoglienza nella Fortezza e posta sotto buona guardia, poiché Malabocca suona il corno e gira d'attorno e non lascia avvicinare alcuno, l'Amante vede l'impresa disperata. Sospira allora e piange e si strugge:

> **Che pena di ninferno è riso e gioco**
> **Ver quella ch'i' soffersi alla stagione.**
> **(son. XXXIV, v. 3-4).**

Ma ecco dopo un lungo soffrire:

> **Allor tornò a me, che lungi m'era,**
> **Ragion la bella e disse: Tu se' corso,**
> **Se tu non prendi in me alcun ricorso,**
> **Poi che fortuna è inverso te si fera.**
> **(son. XXXV, v. 5-8).**

* *

Digitized by Google

E qui il poeta introduce un dialogo rapidissimo, sonetto contro sonetto, tra Ragione e l'Amante, che è un capolavoro di finezza e termina come sappiamo.

Jean invece, prese le mosse dell'ultima parola di Guillaume, che suona disperazione, arranca incerto fra timore e speranza, continuando a lagnarsi per un buon pezzo dei rigori di fortuna e snocciolando una bella fila di Ragionamenti, che stanno ad indicare come egli parli con ragione, anche prima di introdurla sulla scena, o, in altri termini, che non s'è investito dell'allegoria e si muove male fin dai primi passi.

Più chiaro è il raffazzonamento sulla fine del *Roman,* là dove l'azione termina in quell'oscena allegoria finale, che nel *Fiore* è artisticamente perfetta.

Senza dilungarmi in particolari che possono dimostrare come il troviero francese abbia al solito contaminato anche qui l'allegoria con elementi eterogenei ed assurdi, da lui aggiunti piú o meno goffamente, mi contenterò per ora di notare che secondo il Méon, riportato dall'editore Michel, in quasi tutti i manoscritti il *Roman* finisce al v. 22749, là dove dice: — Ainsinc oi la Rose vermeille | Atant fu jor, et ge m'esveille —. Gli ultimi ventiquattro versi, che corrispondono ai due ultimi sonetti del *Fiore,* dice il Méon: — on serai tenté de croire qu'ils ne sont pas du même auteur! — Non avendo ancora le conclusioni definitive del Langlois sul testo, che qui è certamente guasto, mi limito a far osservare che i ventiquattro versi accennati sono tradotti quasi alla lettera, salvo i vv. 22775-22787, che rappresentano la saldatura tra le due parti.

Intanto, com'era da aspettarsi, Jean, traducendo fedelmente, si è dimenticato di ringraziare, insieme con Amore, Venere e i Baroni, anche Nature e Génius, introdotti da lui come elementi necessari!

Digitized by Google

E si badi che non soltanto sul principio e sulla fine, ma sempre, tutte le volte che Jean, servendosi della trama del *Fiore* come di una comoda impalcatura, si mette a sciorinare implacabilmente tutto quello che sa, le saldature appaiono evidenti. Infilata una via traversa, il troviero si perde senza alcun riguardo alla convenienza dei personaggi, che sono sulla scena, e alla verosimiglianza dell'azione. Quando Raison torna la seconda volta per ammonire l'Amant, Jean non si contenta delle rapide ed incisive parole usate nel *Fiore,* ma gli scarica addosso una predica di piú di duemila versi!

Un semplice accenno nel poemetto italiano basta per offrirgli il destro di dilungarsi in una interminabile digressione, in cui si definisce Amore, secondo la teorica di Andrea Capellano, si discutono le varie età dell'uomo si loda l'amicizia, ricalcando Cicerone, si mostra l'instabilità della Fortuna, si biasima la ricchezza, s'esaltano la carità e la giustizia, per arrivare alla narrazione della morte di Virginia!

Evidentissima qui la saldatura della digressione suggerita a Jean dall'accenno alla povertà di Socrate, nel sonetto XLIV del *Fiore.*

Jean sa che non soltanto Socrate fu povero fra gli antichi sapienti, ma anche Eraclito e Diogene, e non può stare senza dircelo. Anche loro vissero tranquilli nella loro miseria come il gran filosofo ateniese, cui:

> **. . . . mai Fortuna nol gì tormentando,**
> **Non pregiò sue levate, nè cadute,**
> **Suo' gioie e noie per lui fur ricevute,**
> **Nè ma' su' viso nonn andò canbiando.**
>
> **(son. XLIV, vv. 5-6).**

Digitized by Google

Basta questo cenno per suggerire al dottore francese l'idea di un poemetto sulla Fortuna, di piú di mille versi (vv. 6593-7643), con materia tolta da Alano e coll'aggiunta di qualche fatto moderno. La descrizione della dimora fantastica della Fortuna, i casi di Nerone, di Creso, di Manfredi e di Carlo d'Angiò sono motivi estranei alla concezione fondamentale del racconto, che Jean ripiglia sulla falsariga del *Fiore* al son. XLVII, dopo aver dispersa la materia dei sonetti XLV e XLVI, ed aver ripreso, si noti bene, il discorso su Socrate. Cosí i due tronconi, tra cui è stato violentemente inserito il poemetto, si saldano in corrispondenza del son. XLV del *Fiore* in questo modo:

A Socrates sera semblables (v. 6583).
Qui tant fu fers et tant estables,
Qu' il n' ert liés en prospérités,
Ne tristes en aversités.
Tout metoit en une balance
Bonne aventure et meschéance,
Et les faisoit égal peser,
Sans esjoïr et sans peser:
Car de chose, quelqu' ele soit,
N' ert joians, ne ne l'en pesoit... (v. 6592)
[Dunque, dice Raison, t'esorto]
... que tu me vueilles amer..... (v. 7607)
Quicunques à Raison s' acorde, (v. 7619 sgg).
Jamès par amors n' amera,
[Ne Fortune ne prisera]
Por ce fu Socrates itiex,
Qui fu mes amis veritiex ecc.

Se da Raison passiamo al personaggio che segue immediatamente nello svolgimento dell'azione, cioè ad Amis,

Digitized by Google

troviamo lo stesso fatto. Anche Amis non si contenta di ripetere la dottrina, per esporre la quale era stato concepito dall'Anonimo nostro con esperienza di libertino e con misura d'artista, ma sciorina, in circa duemila versi (v. 9024-10748), la storia antica e la moderna, parla della gelosia, del matrimonio, espone teorie politiche sulla primitiva società umana e sull'origine della potenza dei re, ricalcando al solito fonti determinate, che possono far fede della dottrina di Jean, ma che portano nel poema il goffo, il contradittorio e l'assurdo.

* * *

Del resto il metodo invariato di Jean, nell'episodio di Nature e Génius e altrove sempre, ci è dato coglierlo nella sua stessa confessione, nella quale a me sembra di poter trovare una non trascurabile conferma alla verità della nuova tesi da me sostenuta.

Jean infatti, dopo che, proprio sulla traccia del *Fiore*, à coperto le donne di tutti i vituperi e di tutte le infamie, ad un certo punto sente il bisogno di scusarsi:

D'autre part, dames honorables,
S'il vous semble que ge di fables,
Por mentéor ne m'en tenés;
Mes as actors vous en prenés,
Qui en lor livres ont escrites
Le paroles que g'en ai dites...
(vv. 16153 e sgg.)

È vero che qui parla di coloro: — qui les enciens livres firent —, e che si può quindi intendere che egli si richiami a

Digitized by Google

Ovidio e agli altri antichi che avrebbe saccheggiati, ma altrove questa limitazione, che era ad ogni modo naturale, perchè gli autori moderni non era uso citarli, non la fa, e cita un testo proprio in un tratto che, stando ai riscontri del Langlois, sarebbe originale, riferendosi alla tela del racconto, e propriamente alla materia dei sonetti LI-LVI del *Fiore:*

> D'autre part, c'est bien plaine chose,
> Ge ne vous i metrai jà glose,
> **Ou texte vous poés fier.**
> (vv. 8313 segg., ed. cit.).

Infatti Jean segue qui il testo italiano con una certa fedeltà, e avrebbe potuto aggiungere, alle parole riferite, quello che protesta altrove:

> Ge n'i fais riens fors réciter,
> Se par mon gieu, qui poi vous couste,
> Quelque parole n'i ajouste;
> Si cum font entr'eus li poëte
> Quant chascuns la matire traite
> Dont il li plest à entremetre....
> (16172-77, ed. cit.)

Si chiama parlar chiaro! Egli affermerà anche più innanzi a proposito di Falsembiante e della satira contro i religiosi — Onc riens n'en dis, mien esciant... — Qui ne soit en escrit trové (vv. 16231-32)! Non mi si vorrà dunque tacciare di temerario, nonostante la novità della tesi che sovverte la tradizione, se io lo colgo in parola, e concludo la laboriosissima dimostrazione, ritenendo provato l'assunto.

Digitized by Google

***

Chi propugna, come nel caso nostro, una tesi nuova e radicalmente sovvertitrice sull'interpretazione di un testo, se arrivi a confermarla colla confessione stessa dell'Autore discusso, può dirsi soddisfatto; ma questa volta la confessione, pur essendo collegata a molte altre premesse, non è cosí recisa e sicura, che possa da sola vincere lo scetticismo e le obiezioni di quelli che stanno attaccati a un consenso tradizionale, che à messo radici robuste. D'altra parte non mi nascondo che la mia dimostrazione è diversa da quella che avrebbe dovuto essere. Io avrei dovuto seguire un altro metodo, piú pedantesco, ma piú sicuro e definitivo: prendere cioè il *Fiore* da un lato e il *Roman* dall'altro e accostarli dal principio alla fine, traendo via via le conclusioni che mi portassero all'ultimo ad una salda conclusione finale. Questo lavoro lunghissimo io l'ho potuto fare solo per mio conto e in parte nella scuola, come solo per mio conto e nella scuola ò potuto commentare stanza per stanza l'*Intelligenza,* di cui tratterò a parte.

Quando invece mi è parso utile rendere di pubblica ragione il risultato dei miei studi, ò dovuto restringere la dimostrazione nel piú breve spazio possibile e quindi togliere molta di quella sicurezza e forza raziocinativa, di cui può valersi chi si appoggia a un testo rimesso a nuovo, o dichiarato frase per frase, come la *Quaestio de aqua et terra,* o come l'*Epistola ilariana,* intorno alle quali, dopo tanto rumore, da dieci anni, o si ripetono le solite vecchie affermazioni, o si tace.

Dolente di trovarmi in queste strette, mi contenterò per ora di convalidare la mia tesi con una riprova.

*

Digitized by Google

E mi domando: — Si ànno buoni indizî, che l'opera di Guillaume fosse dai nostri poeti del Dugento conosciuta e usata prima che Jean pubblicasse il lavoro compiuto?

La risposta è cosí esplicita, che io non so come il Langlois abbia potuto scrivere: — L'influence du *R. de la Rose,* qu' on a cru constater dans la litterature italienne enterieurement au *Fiore* et au *Detto d'Amore,* notamment dans le *Tesoretto* de Brunetto Latini, est immaginaire.

L'affermazione è giusta, solo se si riferisca a chi, come il Benedetto, volle provare che l'opera di Jean de Meun è assai piú antica di quel che non sia, e parlò sempre di *influenza* di tutto il *Roman;* è falsa, se si intenda negare un'irradiazione, che la squisita poesia di Guillaume de Lorris ebbe nella nostra lirica qualche tempo prima che apparisse il *Fiore* e che Jean finisse il Romanzo.

Intanto la tradizione diplomatica stessa ci fa conoscere che la prima parte del *Roman de la Rose* fu divulgata da sola.[1] Che fosse conosciuta in Italia risulterebbe dalle stesse indagini del Benedetto, il quale trovò nella nostra lirica antica tali coincidenze, da dover concludere senz'altro, che l'ambiente nostro nella seconda metà del Duecento non solo era preparato ad accogliere e a comprendere il poema d'oltralpe, ma che c'erano da noi, indipendentemente dal *R. de de la Rose,* germi ed elementi disgregati « da cui sarebbe potuto nascere un Romanzo della Rosa italiano ».[2]

Lasciamo da parte *Il lamento della sposa padovana, Il bel pôme, Il Conciliato d'amore,* perché ardua ne è l'interpretazione, e non definita la data, nei quali, se mai, come nel *Detto*

[1] LANGLOIS, *Introduz.* alla nuova edizione del *Roman,* citata.

[2] *Op. cit.,* p. 142; cfr. p. 159.

Digitized by Google

d'Amore, l'imitazione di Guillaume, e di Guillaume soltanto, sembra chiara.[1]

Lasciamo da parte anche i poeti del dolce stile, la cui attività letteraria si protrasse fin verso la fine del sec. XIII e teniamoci ai poeti piú antichi.

A Guillaume, e a Guillaume soltanto, ci riconduce sicuramente la canzone di Brunetto Latini « S'eo son distretto innamoratamente », dove il poeta ci dice di trovarsi in affanno per « lo bianco fiore auliso », ma aggiunge:

> .....mi dànno
> una buona speranza li martire,
> com' eo degia guerire,
> chè lo bono soferente
> ricieve usatamente
> buono compimento de lo suo desire.

(vv. 5-10, ed. Monaci, in *Crestomazia it. dei primi secoli*, p. 228).

C'è già qui, come si vede, la stessa situazione sentimentale che si à sulla fine dell'opera di Guillaume e sul principio del *Fiore,* col quale si hanno curiose rispondenze verbali: *martire, guerire, bono soferente,* che richiama il *buon Durante.*

Questa consonanza generica si determina poi in seguito. Brunetto si sconforta che la donna sua è lontana, dove egli non può andare: si rivolge dunque agli amatori, perché preghino Amore, che si muova a pietà di lui:

[1] Del *Detto d'Amore* si tratterà a suo tempo per disteso e si chiariranno le sue innegabili relazioni col *Fiore* e la sua dipendenza dal solo Guillaume.

Digitized by Google

Ch' io nom posso campire,
se prosimanamente
ello che fue ferente
non mi risana e fa gioja sentire,
(vv. 37-40).

Abbiamo dunque un amante, che è stato colpito dalle saette d'Amore, e che spera di essere compensato dei lunghi martìri, ottenendo col suo aiuto il *bianco fiore auliso.*

Singolare anche il commiato:

Vatene, canzonetta mia piagiente
. . . . . .
E dì che 'n mare frango malamente,
Ma contro a tempo spanno,
ch' al dritto porto nom posso tenere...
(vv. 41-46).

Da Guillaume siamo passati all'accenno di una figurazione identica a quella dei famosi sonetti XXXII e XXXIII del *Fiore,* senza che di Jean appaia la minima traccia.

Cosí nel cod. Vat. 3793 c' è una poesia anonima: « Di dolore mi conviene cantare », raccolta dal Monaci nella sua *Crestomazia* (p. 285), in cui l'amante dice: — de la rosa fronzuta | diventerò pellegrino — e questa rosa l'à in balia un uomo che l'à allontanata da tutte le gioie e l'à messa in prigione. La donna si lagna che:

A ciaschuno de la masgione
si ranuza il suo sermone,
che guardin bene la presgione.
ch' io no n' esca fuori.
(vv. 56-59).

Digitized by Google

Analogamente opera Jalousie nell'ultima parte dell'opera di Guillaume (vv. 4476 sgg.).

Altri elementi potrei spigolare qua e là, oltre questi e i molti offerti dal Benedetto, ma mi limito a far osservare una cosa interessante, che cioè già in questi nostri vecchi rimatori alle risonanze derivate da Guillaume si aggiungono motivi nuovi, variazioni curiose, che ci portano direttamente sul buon terreno, in cui doveva nascere l'elegante arboscello del *Fiore*.

Ad esempio, Bonagiunta Orbicciani:

Tutto lo mondo si mantien per fiore;
se fior non fosse, frutto non seria;
per lo fiore si mantene amore,
gioie e alegreze, ch' è gran signoria.
E de la fior son fatto servidore,
sì di bon core che più non porìa;
in fiore ho messo tutto 'l meo valore;
si fiore mi falisse, ben morìa.
Eo son fiorito e vado più fiorendo,
in fiore ho posto tutto il mi' diporto,
per fiore agio la vita certamente.
Com' più fiorisco, più in fior m' intendo;
se fior mi falla, ben serìa morto;
vostra mercè, madonna, fior aulente.

(Ed. Parducci, in *Rimatori siculo-toscani del Dugento*, ed. *Scrittori d' Italia*, p. 82).

Qui il *fiore* sarà simbolo della donna, ma altrove Bonagiunta parla piú crudo: —

Per fino amore - lo fiore del fiore - avragio

(ed. cit., p. 85).

Digitized by Google

Se il *fiore* è la donna, si pensi che cosa sarà *il fiore del fiore!* Il verso del Bonagiunta è niente piú che il programma dell'Anonimo del poemetto nostro, in cui amore impone all'Amante di non essere impacciato «se non di fino e di leale amore» per ottenere quello che vuole.

Anche Bacciarone di messer Bacone, che fu amico di Guittone d'Arezzo e con lui ebbe corrispondenza epistolare, à un passo degno di nota, perché moraleggiando, ci richiama a una condizione sentimentale e di fatto, che ritroviamo nel poemetto: —

> Non venosi gecchiti di laudare
> il folle e vano amor, d'ogni ben nudo,
> li matti che si covren del su' scudo,
> il qual manch' è che di ragnuolo tela
> e che li porta isportando a vela.
> Mettonsi 'n mar, creden giunger a porto.
>
> (Canzone: — Nova m' è volontà nel cor creata — ed. Zaccagnini, in *Scrittori d'Italia,* op. cit. pag. 196).

Del resto a mostrare che il terreno in Italia era per tempo preparato e propizio al sorgere quasi spontaneo della concezione del *Fiore,* basterebbe quella briosa *ars amandi* che ci à lasciata Guittone in ventidue agili sonetti, somigliantissima a quella bandita da Amico nel poemetto[1]; basterebbero gli elementi sentimentali e formali piú svariati e curiosi, che troviamo in Andrea Monte e soprattutto in

[1] Ecco uno scoglio in cui si frange la vecchia tesi: — Guittone prima della sua conversione (1266 circa) compone un *ars amandi:* dopo venti o trent'anni, un fiorentino traduce dal francese un *ars amandi* (quella di Amico nel *Fiore* sarebbe infatti tradotta), che è somigliantissima, anche dal lato formale, a quella di Guittone!

Digitized by Google

Rustico di Filippo, nell'uno e nell'altro dei quali le derivazioni da Guillaume sono evidenti.

Cuore bizzarro e ribelle, assetato di gloria, bramoso di ricchezze, tormentato da angoscia rodente e pessimista acerbo, Monte ci dirà il dolore di non trovar corrispondenza di affetto nell'amata, di esser bersaglio dei malvagi ciarlieri, intesi a contendergli il passo verso la meta, e mostrerà molto artificio, stretto dalle pastoie che il provenzalismo aveva introdotto fra noi. Anche in lui, come si è detto, la risonanza di Guillaume è qualche volta sicura: ad esempio, nella Canzone: — Oi dolze amore, — che è la CCLXXX del ms. vaticano 3793: —

Oi dolze amore
che lo mio core
a tutte l'ore — ài si 'namorato
di tal manero
ch' io ben mi spero:
che se lo 'mpero — a me [ne] fosse dato
senza te nol voria,
amor, viso lucente,
cà non mi crederia
esserne mai gaudente.
Vo' ti pregare,
mercè chiamare
ca 'n pene stare — non mi facie tanto:
ch' io nel giardino
aulente e fino
da lo mattino — stesse da l'un canto,
la v' è quel dolze fiore
(sì) fresco ed amoroso,
c' a tut' or, per amore,
a me fa star gioioso.

Digitized by Google

Altrove il poeta, che è piú spesso accigliato, nella sfiducia di tutto e di tutti, esclama che regna e trionfa solo l'ipocrisia, il tradimento e l'inganno, ed à tocchi e accenti, che, tolta la rudezza, ci fanno pensare ad alcuni tratti del *Fiore*. Al quale si accosta in modo mirabile Rustico di Filippo: identica l'arte, identico lo stato d'animo, identici parecchi elementi, in parte desunti da Guillaume, in parte nati nella piena libertà dello spirito che sa creare.

Egli è il poeta della passione ardente e sensuale, della burla e dell'amaro sorriso, che talvolta si muta in un'aperta e grassa risata, tal'altra si congela quasi nel sarcasmo,[1] ed effonde l'esuberanza dell'anima sua scettica e gaudente in rime cosí agili e vive, che, se ne togli la patina d'antico, sembrano nate ieri. Egli vive nelle stesse condizioni spirituali dell'Anonimo nostro, e, come lui, à il verso acuto, il sonetto snodato, l'espressione disinvolta e precisa.

Eppure l'opera sua è stata, come il *Fiore,* fino a quarant'anni fa ignota e la sua figura chiusa nell'ombra fitta, finché l'industria di eruditi moderni non ne à dissotterrati alcuni ruderi in frantumi e non li à raccolti e studiati con amore! La sua vita abbraccia all'incirca lo stesso tempo di quella del suo carissimo amico Brunetto, (1220, o 30-1295?) e quindi per la cronologia siamo nel sicuro, tanto piú che ai sonetti tramandatici il Casini assegna una data anteriore al 1270.

Orbene basta seguire passo passo i suoi limpidi versi anche cosí come sono stati raccolti, un po'alla rinfusa, dal Federici, per convincersi che nessun altro poeta piú di lui si accosta, per lo spirito e per la forma, all'Anonimo del *Fiore*.

[1] V. Cian, recens. all'ed. del Federici in *Bull. son. dant.* N. S. VI (1899-900) pp. 153-157.

Digitized by Google

Ma poiché su questo converrà insistere altrove, io mi limito qui a cogliere qua e là poche cose, che mi riportino in argomento.

Ad esempio, molto singolari e interessanti mi sembrano pel nostro assunto i sonetti IX, XIV, XXIII e XXVII dell'edizione citata.

Nel primo, Rustico dice di aver donato il core ad Amore, che lo deve campare, perché egli è un suo servo fedele che à messo in lui tutta la sua intenzione: un fedele d'Amore non deve mai essere lasciato perire! Cosí ci à detto anche Brunetto, soltanto che Brunetto questa volta ci à richiamati a Guillaume in modo piú chiaro.

Nel sonetto XIV, il poeta ci fa sapere che non à piú il cuore e si domanda come può vivere cosí: il cuore gli è stato rapito da Amore, che l'à messo in balia de l'*Avvenente:*

> Lo cor, quando dal corpo si partio,
> disse ad amor: sengnore, jn quale partte,
> mi meni? e que' rispose: al tuo desio.
> In tal loco è che mai nom partte,
> jnsieme sta il mio core e' l desir mio:
> così vi fosse il corppo jn terza partte.
> (son. XIV, ed. Federici, vv. 9-14).

Piú tardi, e quando abbiamo già nell'orecchio i nomi di cortesia (I, 11) Gelosia (III, 13 e IV, 14), ecco Gelosia di nuovo, e non piú sola come semplice espressione verbale. Il poeta rivolto alla donna esclama:

> Oi amorosa ed avenante ciera,
> nom mi tardate la speranza mia,
> c' ad onta della gente mal parliera,
> mi ritenete jn vostra sengnoria.

Digitized by Google

Deo come son lontan dal me pensiero
li falssi e li noiosi mal digienti,
che là non volgo l'arco ov' eo ne fero.
Ma tuta via mi fann sofrir tormenti,
che spesso l'amoroso viso clero
s'asconde par li falsi parlamenti.
(son. XXIV, ed. cit. vv. 5-14).

Non sembra spuntare qui di tra l'ombra Malabocca e Bellaccoglienza chiusa nella torre? E non si intravede Amore che dà ordini ai suoi Baroni, là dove dice: —

Amor fa nel mio cor fermo soggiorno,
e quindi non si parte nè va fori,
ma manda li suo' messi spesso intorno
ciercando e provedendo gli amadori:
E intende le rasgion ciaschedun giorno,
a tal dà gioia a tal dona dolori?
(son. XXVII, ed. cit. vv. 1-6).

Qui saremmo entrati nella selva di Jean de Meun, se fosse possibile credere l'opera di Rustico posteriore a quella del troviero francese.

La conclusione quindi, che si cercava a riprova di un'altra, non pare dubbia; il credere diversamente porterebbe all'inesplicabile, come pel caso accennato di Guittone, che avrebbe prima del 1266 scritto un *ars amandi* in ventidue agili sonetti, somigliantissima, anche nella parte formale, a quella che piú di vent'anni dopo avrebbe tradotta un Anonimo nostro da un testo francese!

[1] Il Federici à: E 'ntentel e rasgion...; ma anche A. D'Ancona in un esemplare, ora nella Biblioteca Universitaria di Pisa (fondo d'Aucona) annotò in margine a lapis: *errore di stampa.*

Digitized by Google

La storia dunque andrebbe corretta così: l'opera di Guillaume, a cui altri prima di Jean tentò in Francia di dare compimento, e che era già conosciuta in Italia poco oltre la metà del sec. XIII, servì all'Anonimo italiano, come base della sua elegantissima concezione, e alla sua volta il poemetto italiano fu il filo conduttore, anzi la prima impalcatura dell'enorme edificio di Jean, che aveva forse già messo mano di suo alla continuazione del Romanzo e si serviva con tutta probabilità di molto materiale già composto, fra cui forse il poemetto di Nature e Génius. Egli uomo di dottrina più che poeta, non si contentò di ricalcare e riprodurre, ma, obbedendo al suo istinto e a' suoi criteri, volle allungare, imbottire e in parte modificare l'agile e scettica concezione del poeta nostro, adoperando tutto quello che via via gli veniva in mente, o aveva alla mano, senza senso di misura, con una profusione incredibile, che rispondeva perfettamente alle sue attitudini.

Così l'opera di Jean risultò come l'accozzo incoerente di due parti di natura diversa: una poetica, fantastica, nel senso estetico della parola, agile, animata, vibrante nella più larga libertà dello spirito spregiudicato: quel tanto preso a prestito dal *Fiore*, non senza gravi errori e sviste, ma spesso con affannosa fedeltà verbale; l'altra dottrinaria, moraleggiante, errabonda, assurda, più spesso d'interesse informativo, con poca originalità in quanto è tracciata sulla falsariga dei testi più in voga a quel tempo, e che appartiene a Jean: al quale resta pur sempre il merito, non solo di aver accatastato l'erba verde, gli sterpi e i sassi, che danno segno di dottrina e costituiscono, presi insieme, quel mucchio colossale che è la seconda parte del *Roman,* ma ben anche di aver saputo esprimere la sua natura tra giullaresca e pedante, non senza un buon fondo di vivacità rumorosa

Digitized by Google

e di sincerità, che gli à fatto dire di suo cose vere e belle e ardite, se si tien conto dei tempi.[1]

* * *

Se dunque il *Fiore* è, salvo una trentina di sonetti d'introduzione, opera originale di un italiano, anzi di un fiorentino, che cosa possiamo dedurne rispetto al probabile autore?

Nato, comè io ritengo, da una spontanea effusione dell'anima, il poemetto riflette, specchio lucente e fedele, una elaborata vita interiore. Il poeta ci si presenta com'è, nella sua unità spirituale: scettico, epicureo, senza ombra di preoccupazione per la morale corrente, irrisore del sentimento religioso, degli ordini costituiti, famigliari e civili, della santità del giuramento,[2] del disprezzo della ricchezza e dei godimenti, della purità dei costumi della donna, che crede tutte corrotte o corruttibili.

Egli mostra ad ogni passo di vivere nella sua età, come un uomo di altri tempi, ubbidiente ai piaceri del senso e lieto di quel suo stato di naturalismo primitivo, che lo fa passare spensierato attraverso le folle dei contemporanei preganti e timorosi dell'al di là, col riso beffardo dell'ateo e del libertino, tutto inteso alla contemplazione di Venere nuda.

[1] Cosí si torna in sostanza al giudizio del Novati, op. cit, pag. 292-3, che dieci anni fa scriveva: — In fondo, io non so vedere in che sovrasti, ove si tolga il gravoso ammanto dottrinale di cui è ornato, Giovanni di Meun al gaio ed arguto Rutebeuf.... Giovanni de Meun, tutto ben sommato, ci si offre per l'appunto come il tipo piú compiuto... di troviero.

[2] La canzonatura ai giuramenti e qualche altro indizio (cfr. s. 53, 219 e altrove) lo farebbe sospettare paterino.

Digitized by Google

Questo stato d'animo e alcuni dati di fatto mi obbligano a fissare certe condizioni, a cui deve rispondere il probabile Autore:

1.° Esser fiorentino, o almeno toscano.

2.° Aver praticato la Provenza cosí da formarsi una sua lingua tosco-provenzale, diversa da quella di altri provenzaleggianti del tempo, sopratutto in questo, che nei provenzaleggianti la parola e la frase sembra desunta spesso da reminiscenze letterarie, mentre in lui è linguaggio vivo.

3.° Esser libero da qualunque preoccupazione religiosa o morale, irrisore della religione fino a rinnegare il Vangelo e Dio,[1] insofferente di tutto ciò che portasse un vincolo alla libertà di pensare e di fare, acceso d'odio contro gl'inquisitori che perseguitavano gli eretici, i paterini e i *bordellai*.

4.° Avere della donna, considerata come unico strumento di piacere, il concetto più basso e triviale, in perfetta antitesi colla concezione Guinizelliana e del dolce stile, tanto da costituire delle donne due categorie: quelle che per danaro si danno, e quelle che invecchiate e costrette con infinito rammarico a lasciare il mestiere, per danaro si fanno mediatrici di vizio alle giovani, colla complicità delle stesse mamme.[2]

5.° Portare sulle labbra e far vibrare nella parola un certo sorriso tra il burlesco ed il satirico, tutto spontaneo e naturale, ed esser ricco di termini, frasi e allegorie a doppio

[1] Ed ogni altra credenza metti a parte — Nè non creder nè Luca nè Matteo — Nè Marco, nè Giovanni.... son. V, vv. 13-15; — In nessun altro Dio che te [Bellacoglienza] non crede... son. CCXVII, v. 5.

[2] Cfr. le parole di Cortesia alla figlia Bellacoglienza nei son. CCXXVI e CCXXVII.

Digitized by Google

senso e del linguaggio proprio di chi sia sfrenato nei costumi e rotto ai vizi della carne.[1]

6.° Vivere sicuro e tranquillo senza rimorsi e turbamenti, come chi irride ai richiami della ragione e non pensa che a godere la vita e i piaceri, grato soltanto ad Amore e a Venere (son. CCXXXI), quando abbia ottenuto lo scopo, perseguito con tutti i mezzi (i doni, Falsembiante, la Vecchia ecc.).

Queste qualità desunte non da incerti dati esterni, ma dalla lettera, dall'intima natura e dallo spirito stesso del poemetto mi costringono a mettere da parte subito Dante, benché io riconosca, che la congettara del Mazzoni, sostenuta con mirabile dottrina e squisita eleganza di argomenti, fosse da considerarsi fin qui la migliore.

Infatti, pur consentendo col Mazzoni che Durante sia non un nomignolo, ma un nome, pur ammettendo che tutti i Duranti contemporanei debbano, chi per una ragione, chi per un'altra, essere messi fuori causa, non riesco a trovare una nicchia per collocarvi Dante, all'incirca ventenne e già nello stato d'animo e d'esperienza necessario a spiegare la concezione del poemetto. Brunetto Latini gli avrà

[1] Si notino, ad esempio, le frasi: aver caldo il forno; riscaldare il fornello: non aver ancora arata la terra, detto di una fanciulla; essere a lavorio; il bordone, la scarsella, la balestriera, le reliquie; metterlo dentro tutto randone [provenz. *de randon* = con impeto] ecc. È certo però che l'immoralità del *Fiore* non consiste tanto nel linguaggio pornografico e nella lubrica allegoria finale, quanto nella concezione generale da cui è animato da cima a fondo e nelle due *ars amandi*, una per gli uomini e l'altra per le donne, che superano di un buon tratto quella d'Ovidio!

Digitized by Google

fatto conoscere Guillaume, gli avrà certo insegnato il francese, ma come è poi nata quella tal lingua provenzaleggiante, cosí curiosa e cosí viva nella sua impurità, e pur cosí diversa da quella della *Vita Nuova* e delle liriche dantesche, che per tempo, piú vi s'accostano?

Se l'incertezza sulla data della seconda parte del *Roman de la Rose* ce lo consentisse, si potrebbe posticipare la data del *Fiore,* fino ad arrivare al periodo del traviamento di Dante; ma anche in questo caso, che del resto non credo probabile, bisognerebbe, per assegnare il poemetto al Divino poeta, essere sicuri che il suo traviamento fu proprio un cataclisma di tutti i suoi sentimenti e delle sue facoltà, tale da fargli cambiar natura e da renderlo un altro nella locuzione, nel pensiero e nel sogno.

E quali sono le colonne piú robuste, che sostengono l'edificio della candidatura di Dante?

Io ne conosco tre, scavate dal Castets e ripulite poi in seguito, coll'aggiunta di bei capitelli e di fregi: il nome, la quartina e la dedica.

Pel nome osservo che, se il tema svolto nel poemetto è che *in amore chi la dura la vince,* il poeta, qualunque nome avesse, poteva ben chiamare ser Durante l'allegorico protagonista, ossia la sua persona assunta all'ufficio di simbolo e circondata da un ser Malabocca, da un mastro Falsembiante, da una dama Cortesia, da una madonna Oziosa e da parecchie altre figure allegoriche, *che portano tutte un nome rispondente al loro ufficio e alla loro attitudine.*

Finchè Durante si doveva credere una persona reale, perchè messa a sostituire la persona reale di Guillaume, c'era un punto d'appoggio per la discussione sottile intorno a Durante che equivale a Dante, intorno al *ser* aggiunto in tono

Digitized by Google

di scherzo, e a certe osservazioni prudenti ed erudite, che potevano far pensare; ma ora che abbiamo mostrato come il nome di Guillaume sia stato violentemente introdotto da Jean al posto di Durante, non si capisce perchè si dovrebbe insistere su di un'interpretazione, che ad ogni modo è sempre unilaterale.

Per non dire che, data una materia come quella del *Fiore,* in tempi di gravi pericoli, cogli inquisitori che specialmente in Firenze fiutavano dappertutto, non è facile pensare che l'autore mettesse allo scoperto il proprio nome, come non è facile credere che Dante abbia assunto un tono di sfida verso le credenze e la morale corrente, per poi non esporre la propria persona, quasi coprendola d'un velo!

Per la quartina, dal Castets in poi, si va ripetendo una cosa che non è esatta. Si dice cioè, che un'antica tradizione attribuisce a Dante la prima quartina del son. XCVII del *Fiore,* mentre la tradizione si limita a riferirci che Dante una volta non già compose, ma *diede,* suggerì ad un tal signore, in una tal circostanza, una quartina, che nemmeno a farlo apposta, è un po' diversa da quella del *Fiore* e in tutto uguale a un'altra di Bindo Bonichi.[1]

[1] Chi nella pelle d'un monton fasciasse
Un lupo, e tra le pecore 'l mettesse,
Dimmi, cre' tu, perchè monton paresse,
Ched ei perciò le pecore servasse?

Cfr. BINDO BONICHI, ed. PAPANTI, in *Dante secondo la tradizione* ecc., p. 43; e per la quartina del *Fiore* vedi qui piú addietro, a pp. 41-42.

È poi curioso il modo col quale l'attribuzione a Dante à acquistato consistenza.

Il D'Ancona in una nota, riportata dal Castets, a p. 153, dice: — Questo sonetto fu attribuito a Dante, v. *Canzoniere,* ed. Fraticelli,

Digitized by Google

Quanto alla dedica, dirò che l'Alighieri, se conobbe l'opera di Jean de Meun, dovette formarsene un ben triste concetto e giudicarla molto piú severamente di quel che non fece il Petrarca:

> Somniat iste tamen dum somnia visa renarrat,
> Sopitoque nihil vigilans distare videtur! [1]

Non credo quindi che sia arrivato mai a suggerire a Betto Brunelleschi: Se ti è nebbia il *Fiore,* va e cerca il sereno e la luce nell'opera di Jean, perché in Jean c'è nebbia, incoerenza, assurdo, mentre nel *Fiore* c'è luce anche troppo chiara! Come stento a credere che Dante possa aver usato la parola *pulzelletta,* per designare un'opera di 3248 endecasillabi, che per dimensioni, fra le opere dantesche di poesia, verrebbe a collocarsi subito dopo la *Commedia.* Se il *Fiore* era una *pulzelletta,* che diavolo doveva poi essere la *pulzella* del sonetto a Lippo?!

p. 280 —; si va a pagina non 280, ma 286 del *Canzoniere di Dante* del Fraticelli, e si trovano notizie erudite e un rimando al *Catalogo dei Codici mss. della Riccardiana* del Lami, pag. 22; si passa al Lami e si impara che in un Codice: — Inter haec Dantis carmina ita scriptum est: — Questi quattro versi fe' Dante, sendo in corte d'un signore ecc., in tutto uguale alla novella desunta dal Papanti (*Dante secondo tradizione* ecc., pag. 40), dove però mancano le parole: *Questi quattro versi fe'.*

Nel testo non si dice che Dante componesse i versi, ma solo che: « Dante come il Fante fu partito, veduto dove egli andava, s'accostò al Signore e *dettegli* questi quattro versi... »

Che la quartina fosse passata in proverbio, giudicarono anche il D'Ancona, e il Carducci, in *Cantilene e Ballate,* p. 28, nota.

[1] PETRARCA, *Poesie minori,* Milano, 1834, p. 342 sgg.

Digitized by Google

Su basi così fragili, solo rincalzate da qualche raccostamento verbale,[1] si poteva bensì costruire con prudenza una congettura come à fatto il Mazzoni, il quale, da finissimo artista, à sentito pel primo che solo un poeta vero poteva darci il *Fiore,* ma non era permesso offuscare dopo sei secoli la memoria di Dante, accogliendo tra le opere sue questo elegante, ma lurido *vade-mecum* per bordellieri e mezzane, che, non fosse altro, è in così stridente contrasto colla divina armonia del suo spirito.

Che cosa penserebbe uno di noi, levando il capo dalla tomba di qui a qualche secolo, se trovasse stampata tra le poesie del Carducci una dissepolta novella del Batacchi, o *L'assalto di Castel Buco* di Argia Sbolenfi?

---

[1] Per esempio, che i Pugliesi eran bugiardi (Al buon Amico che non fu di Puglia, son. XLIX, n. 3) lo dice anche Folgore: — Tra noi regna il Pugliese e 'l Ganellone, — nel son.: « Così faceste voi, ecc.

Altre considerazioni sull'arte e sulla qualità del probabile Autore dovranno farsi, quando si tratterà del *Detto d'Amore*, operetta che à col *Fiore* più affinità di quel che non si creda, e rappresenta una concezione anteriore, con materia desunta dal solo Guillaume de Lorris. Anche la tesi dell'originalità del *Fiore* acquisterà allora un discreto rincalzo.

N. B. — A pag. 8, lin. 9-10, si corregga: l'una e l'altra membranacea.

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 4.

PISA
TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI
Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

IV.

Prof. A. VACHETTA

UNICUIQUE SUUM

ALCUNE RIVENDICAZIONI STORICO-CHIRURGICHE.

Digitized by Google

Digitized by Google

Il vedere alcuni scrittori attribuirsi, come di proprie scoperte, la priorità ed il merito di cose note già molto tempo prima, poi trascurate, cadute in dimenticanza, o semplicemente da loro ignorate, e tali cose prendere poi il nome da chi le richiamava in uso, è fatto non raro ad avvenire in ogni ramo delle scienze; e chiunque si diletti di studî storici sulle cose sue professionali ne incontra quasi quotidianamente degli esempi. I quali vengono a confermare sempre più l'asserzione d'Orazio, che

multa renascentur quae iam cecidere, cadentque
quae nunc sunt in honore....

Ma da questa rinascenza, pur sempre meritevole per chi la procura, ad una vera e propria scoperta corre molta distanza; e più o meno presto e sovente accade che un amatore di ricerche storiche e bibliografiche trovi l'occasione di correggere errori o di far giustizia di usurpazioni, dei quali e delle quali pochi o nessuno s'erano ancora accorti.

So anch'io che tali studî e tali rivendicazioni, oltre al richiedere pazienza, tempo, spese e lavoro non facile, specie

Digitized by Google

quando si tratti di consultare libri rari, edizioni antiche o vecchi manoscritti, solitamente custoditi gelosamente in biblioteche private o pubbliche, dànno alcune volte risultati, che possono riescire ingrati ed odiosi a taluno; ma so pure che esse, oltrechè assai interessanti e dilettevoli a chi le compia con amore, riescono sovente un' opera di giustizia ed un dovere tanto più nobile a compiersi e grato quando i frutti di tali ricerche riescano ad onore e rivendicazioni patrie.

È per queste considerazioni e perchè animato dall' esempio d' illustri predecessori e maestri, che coltivarono con alta mente e con calda passione gli studî storici delle due medicine, l' umana e la veterinaria, tra i quali ricordo con particolare compiacimento il conte Ercolani e il prof. Delprato fra gli italiani, che io, anche animato dai loro consigli, ho cercato di seguirne modestamente le orme. Ed anche a me ha arriso alcune volte la sorte; avendo io potuto constatare che varie cose date come novità, più sovente straniere, erano invece cose già antiche in Italia; e per contro in qualche caso dovetti ascrivere ad autori stranieri cose, che correvano sotto il nome di italiani; e lo feci, non lo nascondo, con qualche rincrescimento, ma spinto da sensi d' onestà e di giustizia.

Così, coi documenti alla mano, rivendicai all' italiano Lorenzo Rusio (1300) il bendaggio inamovibile colle resine, riproposto parecchi secoli dopo in Belgio dal Delwart, da cui ha preso e porta ingiustamente il nome, e la cauterizzazione attuale inerente profonda. E dimostrai che fin dal 1490 si pubblicava in Italia una succinta descrizione della distocia da torsione uterina nella cavalla, da *Agostino Columbre, Colombre* o *Colombo* da Sansevero (Foggia), col relativo pronostico infausto; mentre i Francesi tuttora attri-

Digitized by Google

buiscono tale prima cognizione al loro *Boutrolle,* il cui libro *Le parfait bouvier* fu pubblicato solo nel 1776; ed i Tedeschi l'attribuirono ai loro connazionali *Schenker, Vix, Wegerer* ed altri, venuti assai posteriormente.

In un codice cartaceo, che io fin dal 1869 potei studiare nell'Ambrosiana di Milano, scritto da un *Guglielmo Di Fiandra* modenese nel 1347, trovai indicata una cura dell'*incastellatura* dei cavalli mediante adatto pareggio dell'ugna, applicazione d'un ferro e dilatazione forzata di questo, *ben chiaudto et caldo,* per mezzo d'una morsa inversa, che il *Di Fiandra* chiama *le alargatoie;* e di queste allargatoie fanno poi menzione altri nostri scrittori posteriori. Ed esse non potevano essere che, con poche differenze, il famoso *étau contraire* del *Defays* padre (1829), più tardi modificato in varia guisa e ribattezzato *désencasteleur.*

Già altrove[1] ho notato che la cosidetta *operazione del Bassio* desmotomia rotulo tibiale interna a cura della sublussazione superior interna della rotula negli equini e bovini (il cosidetto *crampo*) è stata prima ideata dal Pastureau,[2] che la pubblicava fin dal 1849; e notai pure, adducendone i documenti probativi,[3] che l'operazione impropriamente chiamata del *Williams* (asportazione della mucosa d'uno o dei due ventricoli laterali laringei a cura del sibilo o del rantolo da emiplegia laringea per lesioni del n. ricorrente), invece che al valente chirurgo americano, deve ascriversi al *Günther* padre, annoverese, che primo la ideava, la praticava, poi l'abbandonava, per i risultati poco soddisfacenti che ne aveva ottenuti. E, così stando le cose, al *Bassi* no-

[1] *La chirurgia spec. d. anim. Pisa 1889,* vol. II, pag. 631.
[2] *Journal des Vétér. du Midi,* pag. 484.
[3] *Chir. spec.* 1.ª ediz. vol. 3, pag. 165.

Digitized by Google

stro ed al *Williams* spetta peraltro il merito d'avere richiamato in uso operazioni già completamente abbandonate.

Interessantissime e d'uso frequente nelle due medicine sono le sezioni di tendini, aponevrosi, muscoli e legamenti. Circa l'origine delle tenotomie, aponevrotomie, miotomie e desmotomie si sono espresse opinioni svariatissime. Senza neppur tentare di redigerne qui la storia, io ricorderò solo che già *Aristotele* e *Plinio* il naturalista parlavano della sezione del così detto *verme,* organo desmoide della lingua del cane, cura assurda, che venne poi estesa anche al maiale; e che in talune malattie dell'occhio del cavallo non meno inutilmente si raccomandava, specialmente da scudieri ed ippiatri francesi del secolo XVII, l'*énervation*, recisione d'uno o d'ambo i tendini dell'elevator proprio del labbro superiore.

Nell'esordio dell'evo moderno troviamo la prima indicazione curativa razionale d'una di tali operazioni nel libro del *Columbre* [1] già ricordato, il quale fin dal 1518 (1.ª edizione) descrisse bene l'aponevrotomia del coraco-radiale contro la cosidetta *arcatura* del cavallo, operazione che fu poi praticata molte volte con buon risultato dal *Trutta* [2] assai prima del *Lafosse* figlio,[3] al quale i Francesi ne attribuiscono a torto il merito.

In chirurgia umana la scoperta e la pratica della miotomia è attribuita *a Ruggero Roonhuysen*,[4] che primo curò un *caput obstipum* colla sezione dello sterno-cleido-mastoideo, imitato poi dal *Meekren*, dal *Tulpius*, dal *Blasius*[5] etc. E

[1] *Dal modo di conoscere la natura de' caualli* ecc., Venetia 1622, pag. 160.
[2] *Novello giardino della pratica* ecc., Napoli 1775, pag. 199.
[3] *Cours d'hippiatrique,* Paris 1772, pag. 317.
[4] *Heilkuren,* Nürnberg 1674, n. 22-23.
[5] Cfr. AB AMMON *De Physiologia tenotomiae experimentis illustrata,* Dre-

Digitized by Google

più tardi il *Thilenius*,[1] seguito poi dal *Michaelis* sulla fine del sec. XVIII e da altri, tra cui specialmente il *Delpech*,[2] che sezionò primo il tendine d'Achille a cura del piede talo od equino nell'uomo, ed istituì una serie di esperimenti sugli animali per bene studiare l'operazione stessa ed il processo di guarigione.

È strano che tanto la prima quanto la seconda di queste operazioni caddero poi in dimenticanza, e che i Francesi stessi non apprezzarono come occorreva gli studii del *Delpech* loro compatriota!

L'essersi dai veterinarii attribuita la conoscenza della tenotomia al *Rusio* (1300)[3] ed al *Ruini* (1590)[4] è stato un errore, giacchè questi e varii altri scrittori non parlarono che delle ferite accidentali ai tendini e della tenorafia. Ciò notò già l'*Ercolani*.[5]

La tenotomia razionale fu indicata e descritta, assai prima che nella chirurgia umana, in quella veterinaria, e conosciuta a Roma verso il 400 d. C. E lo dimostra inoppugnabilmente quanto sto per esporre.

Prima di *Publio Vegezio Renato* (500 d. C.), oltre agli scrittori greci e cartaginesi di cose agrarie, che tutti, quale più quale meno trattarono con varia estensione anche dell'allevamento, dell'igiene e delle malattie degli animali domestici, circa una cinquantina di *ippiatri* o *mulomedici* scrissero opere di veterinaria, ed i loro nomi, e capitoli dei

edae 1837, pag. 9. *Deutsche Chirurgie* di BILLROTH e LÜCKE, Disp. 34, Stuttgart 1880, pag. 9 e 37, ed i comuni *Trattati di chirurgia*, ed *Observationes medicae* del BLASIUS, Amsterdam 1677, parte II.

[1] *Med. und chir. Bemerkungen*, Frankfurt a. M. 1789, pag. 335.

[2] *Chirurgie clin. de Montpellier*, Paris 1823, vol. II, pag. 2.

[3] *Hippiatria*, Lutetiae 1532, pag. 140.

[4] *Delle infirmitadi de' caualli*, Bologna 1598, pag. 298 e seg.

[5] *Scrittori di Veterinaria*, Torino 1851, vol. I, pag. 449 et alibi.

Digitized by Google

loro scritti sono riportati da *Vegezio* e da parecchi autori anteriori e posteriori a questo, e si trovano nell'antologia fatta e tradotta in latino dal greco e pubblicata dal *Ruellio* a Parigi nel 1530 *(Veterinariae medicinae libri II).* Ma le opere intere manoscritte, e tuttora inedite, di parecchi degli ippiatri greci, nel testo originale o nella traduzione latina o volgare antica o relativamente recente, si conservano ancora nelle biblioteche, ed alcune vennero anche già pubblicate. Il *Molin,* il *Sarchiani,* l' *Ercolani,* il *Delprato,* il *Barbieri* in Italia già da tempo ce ne fecero conoscere alcune pubblicandole; ed altre se ne pubblicarono all'estero. E più recentemente (1901) *Eugenio Oder* nella *Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum teubneriana,* in un vol. di pag. XXVII 467 con una tavola in fototipia, e con prefazione e note amplissime pubblicava la « *Claudii Hermeri Mulomedicina Chironis* » che si conserva in Ms. membranaceo in una biblioteca di Monaco di Baviera, e che già era stata studiata da *Gugl. Mayer,* e, prima che da questo, dal *Suida.*

In tale pubblicazione si constata anzitutto per quanto riguarda il latino, essere verissima l'asserzione di *Vegezio*[1] che *Chiron.... et Absirtus diligentius*[2] *cuncta rimati, eloquentiae inopia et sermonis ipsius vilitate sordescunt.* Lasciando da parte *Absirto,* varii capitoli del quale si trovano nei *Geoponici* e nella ricordata pubblicazione del *Ruellio,* indubitatamente la traduzione latina di *Chirone,* che sarebbe stata fatta verso il 400 d. C., ribocca di sgrammaticature, di idiotismi e barbarismi, e pecca troppo sovente contro l'ortografia e la sintassi. Ciò non tolse peraltro che *Vegezio* se ne valesse ampiamente, e tanto, che l' *Oder* lo accusa di

[1] *Artis veterinariae, sive mulomedicinae, libri IV,* Basileae 1828, Praefatio.
[2] Questo comparativo si riferisce specialmente a *Pelagonio* ed a *Columella.*

Digitized by Google

plagio. Ma *Vegezio* fu un plagiatore fortunato, perchè la rarità dei codici di *Chirone* e di *Hermerio* fece sì che letterati e veterinarii non poterono farne confronto col libro di *Vegezio* stesso; e questi venne fino ai tempi nostri ritenuto originale e dichiarato *savio* per eccellenza ed *autor veracissimo,* al quale attinse la maggior parte dei nostri autori fino all'istituzione delle Scuole veterinarie (1762). Taluni anzi ne copiarono interi numerosi capitoli; ed a ragione asserisce il Delprato[1] che libri intieri non ne sono che una copia, come p. es. quello di *M. Filippo Scacco* da Tagliacozzo *(Trattato di mescalzia.... diviso in quattro libri; Roma 1591,* con molte fig. in legno), libro che è solamente « una cattiva compilazione di *Vegezio,* che il napoletano in parecchi luoghi mostra di non aver ben inteso » *(Delprato).* Ed io posseggo un Ms. del 1400, in un linguaggio semilombardo, dal quale oserei dire che lo *Scacco* ha copiato quasi letteralmente la sua *Mescalzia,* italianizzandone solo i molti provincialismi. E così toccò a *Vegezio* di subire il furto medesimo ch'egli aveva perpetrato contro *Chirone* ed *Hermerio!*

Che la *Mulomedicina* ricordata sia realmente di diversi autori, di cui uno probabilmente anche traduttore, lo dimostra, oltre all'essere, nel Ms. di Monaco, i libri I, II, nel loro fine attribuiti a *Chirone,* il IX a *Chirone* ed *Absirto,* il libro X che termina con queste parole: « *Claudius hermerios veterinarius liber decimus Explicit* »; poi ai 966 paragrafi dell'opera ne seguono altri 26 di autore incerto.

La scorrettezza del testo latino, già tale fin da quando esso era sfruttato da *Vegezio,* ci autorizza a pensare che o

[1] Cfr. *La mascalcia di Lorenzo Rusio volgarizzata* ecc., vol. 2, pag. 115, nella *Collezione d' opere inedite o rare* del Romagnoli di Bologna, 1870.

Digitized by Google

Claudio Hermerio (hermerios) fosse un greco, a cui il latino fosse poco famigliare, e che egli stesso abbia voluto tradurre in questa lingua l'opera di *Chirone* e la propria; o che, tradotta la prima in latino, quale egli lo conosceva cioè poco, abbia scritto in questo medesimo idioma le aggiunte fatte a *Chirone;* oppure che un romano ben poco colto abbia già *ab antiquo* fatte le due traduzioni dal greco, foss'egli un amanuense, cosa meno credibile, oppure un *veterinarius,* il che mi pare più probabile.

E che gli scritti originali fossero almeno due distinti lo prova pure il fatto che in due diverse parti della *Mulomedicina* qui in esame si trovano le stesse materie e gli stessi insegnamenti, quantunque esposti un po' diversamente da una volta all'altra. Nel fine poi del libro I leggesi: « *Chironis centauri veteriniani liber primus explicit* »; e la stessa denominazione *Chiron centaurus* appare insieme col nome di *Absyrtus* come degli autori del libro IX.

Vuolsi da taluni che l'attributo mitico di centauro venisse dato a *Chirone* perch' egli coltivasse, esercitasse ed insegnasse non solo la medicina dell'uomo (e lo dicono maestro di *Eusculapio* e vivente circa 50 anni prima della guerra di Troia), ma ancora quella del cavallo; e che ne scrivesse un libro col titolo Ἱππιατρικόν, ricordato dal *Suida,* per la qual cosa, dice questi, fu anche chiamato Centauro (διὸ καὶ Κένταυρος ὠνομάσθη).

Ma ritorniamo a bomba. In due capitoli della *Mulomedicina,* a proposito dei piedi o dei cavalli *rampini,* cioè collo zoccolo in punta più verticale del normale, è chiaramente insegnato a sezionare il tendine flessore profondo delle falangi, o perforante; e ciò circa 600 anni prima del 1000 dell'êra volgare! Io non credo potere far meglio che riportare qui testualmente i due capitoli e tradurli poi fedelmente.

Digitized by Google

Il cap. XXXIV del libro 7. (pag. 199) dice:

« *Si quid iumentum in pedem priorem scaurum factum fuerit, sic curabis. deponés iumentum, deinde ipsum pedem, ad gressus ungulam componis, deinde religatum pedem loro in recto duo tenent. super articulum cutem aperiebis et de tribus nervis super alterum intro haerentibus unum medianum ferramento praecidis, sic ne alteros nervos laedas. cum ungulam correctam videris, aceto et oleo delavabis, mutaria eodem loco saturata subcalcabis, deinde lanas sucidas satiatas impones et fasciabis diligenter. super fascias regulas tiliagineas imponere curabis. solve iumentum* » ecc. Così io lo traduco:

« Se qualche cavallo sia in un piede anteriore diventato rampino curerai così. Coricherai il cavallo, poi a quel piede pareggerai l'unghia profondamente,[1] quindi due (*persone*) legato il piede con cinghia lo tengono in direzione retta. Sopra il nodello[2] aprirai la pelle e dei tre nervi[3] sovrapposti l'uno su l'altro nel lato interno reciderai uno, il mediano, col coltello in modo che tu non offenda gli altri nervi. Quando avrai vista l'unghia raddrizzata laverai con aceto ed olio, comprimerai nello stesso luogo stoppe ben intrise, quindi vi porrai sopra lane sucide e fascerai diligentemente. Sopra le bende avrai cura di mettere ferule di tiglio. Scioglierai il cavallo ».

Ed al capo LXXVII dello stesso lib. 7.° pag. 218, si ripete:

« *Quodcunque iumentum scaurum factum fuerit, sic curato.*

[1] Aggiusterai *ad gressus;* in altri luoghi dice *ad pressum.*

[2] In altri passi il vocabolo *articulus* è usato genericamente per *articolazione;* qui ed altrove per nocca o nodello (artic. metacarpo- o metatarso-falangea).

[3] Anche Corn. Celso lib. VIII, cap. 20-24, chiamava *nervi* i muscoli, tendini, legamenti: così molti altri.

Digitized by Google

eundem deponito iumentum et pedem diligenter componito. tempta ungulam corrigere invenies nervum in suffraginem[1] *tensum et constrictum. eum nervum scalpello (inter digitos) incidito, statim sonitu reddit in ungula, laxabis et consuetudinem pristinam revocabis. aceto et oleo licinium (et) satiatum in eandem plagam subcalcare et pulvini more pannum factum suffragini inpones et fasciabis, fasciolam madida ex aceto et oleo diligenter constringis: cum bene fasciaveris, solves iumentum et eriges. invenies eum rectam ungulam ponere, recte ambulare sine clodigine.*[2] *curabis vulnus cottidie, quomodo in ceteris demonstravi. sanum fiet* ».

Traduzione: « Ogni cavallo che sia divenuto rampino cura così. Corica tale cavallo e pareggiane diligentemente il piede. Tenta di raddrizzare l'unghia (*e*) troverai nello stinco un nervo teso e contratto. Incidi collo scalpello (tra le dita) quel nervo (*che*) tosto fa uno scroscio nell'unghia, allenterai e rimetterai nello stato primiero (*il piede*): pigia nella piaga stessa una compressa intrisa in olio ed aceto e sullo stinco poni un panno disposto a mo' di cuscino e fascierai. Stringerai con diligenza una benda bagnata d'aceto e d'olio: quando avrai bene fasciato scioglierai il cavallo e lo farai alzare. Troverai ch'esso pone (*a terra*) lo zoccolo diritto e cammina bene senza zoppicatura. Curerai la ferita ogni giorno come ho dimostrato in tutti gli altri casi. Sarà guarito ».

Il termine *scaurus,* sebbene di uso non comunissimo, pure è di buona latinità. *Orazio* lo usa (V. *Sermonum* lib. I, Sat. III, vers. 48); ed è noto che servì anche come cognome

[1] *Suffrago* è il pasturale; *os suffranigis* la 1.ª falange; talora, come qui, indica invece lo stinco o metacarpo.

[2] *Claudigine,* da *claudus,* zoppo.

Digitized by Google

personale presso le famiglie *Aemilia* ed *Aurelia*. Esso proviene dal greco σκαύρος che troviamo anche in *Absirto* od *Apsirto:* Ιππος ἱνακὸς πρὸς ὀχείαν μὴ σκαύρος πόδας ἐχέτω μηδὲ ταπεινούς: uno stallone per il cocchio non abbia piedi rampini nè bassi (piatti).

E che realmente lo *scaurus* di *Chirone* e di *Ermerio* indichi il *rampinismo* ed il *rampino* del nostro linguaggio attuale e non l'*arrembatura,* oltre che dal contesto dei due capitoli testè riportati testualmente e tradotti, risulta anche chiaramente da altri passi dei due scrittori, ove è parola dell'arrembatura sotto la denominazione di *ortaculum*[1] e di *stilosus*. Così al cap. XLII del lib. 4.° pag. 118, troviamo:

« *De ortaculo quem stilosum vocant.*

de ortaculo quem quidam stilosum vocant. quem sic cognoscis. patitur hic contractionem nervorum in pedibus prioribus et capitibus ungularum calcat. rectis articulis erit. quare et ortaculi vocantur quod stilo recto similes pedes habet, inde stilosi dicti sunt. plenas[2] *ungulas in terra ponere non possunt, pendentibus taxillis incedunt recte quasi clodigine. quibus nervi in articulis dextra sinistra eminentes erunt, quasi scauros futuros sic eos multi aestimant* ». Il che io traduco così:

« Dell'arrembatura che chiamano stiloso.

Dell'arrembatura che alcuni chiamano stiloso, che così conosci. (*Il cavallo*) soffre ritrazione dei nervi nei piè d'avanti, e s'appoggia sulle punte delle unghie, sarà coi nodelli dritti, per il che diconsi anche ortacoli perchè ha i piedi dritti simili ad uno stile, onde sono detti stilosi, non possono posare gli zoccoli piani a terra, camminano coi talloni sospesi verticalmente quasi per zoppicatura, avranno

[1] Da ὀρτὸς, dritto e κῶλον, arto, piede.

[2] *Planas.*

Digitized by Google

i nervi sporgenti a destra e sinistra ai nodelli come futuri rampini, così molti li giudicano ».

Quanto alla cura, gli AA. insegnano a salassare sotto il fiocchetto od in corona, a pareggiar bene l'unghia, ad applicare empiastri ed altri topici; dicono che taluni fanno la cauterizzazione trascorrente a striscie a mo' di foglie di palma (*palmatim*), ma non parlano più di tenotomie. Comunque sia, dai due testi che ho riportati risulta chiaro ed inoppugnabile che la tenotomia razionalmente praticata è invenzione veterinaria, e che fu impiegata sul cavallo molti secoli prima che sull'uomo.

Ed ora passiamo ad un'altra priorità che già fu discussa e contestata molto.

Il prof. *Ferdinando De Nanzio* di Napoli nel 1836 presentava all'Accademia di Medicina di Parigi una sua memoria, nella quale esponeva il tecnicismo operatorio per praticare la cauterizzazione profonda, inerente, sottocutanea, in casi di zoppicature gravi croniche, specialmente artropatiche, scapolomerali e coxofemorali. Egli diceva *suo* e *nuovo* tale procedimento; ma fin d'allora i prof. *Dupuys* e *Bouley,*[1] incaricati d'esaminare lo scritto del *De Nanzio* e riferirne all'Accademia, notavano che tale operazione non era nè sua, nè nuova; e che già il *Bourgelat*[2] la consigliava. E più tardi lo stesso *Bouley,*[3] ritornando sull'argomento, diceva che varii altri scrittori già ne avevano parlato (*Solleysel, Ruini* ecc. ecc.); e diversi altri autori francesi sorsero tosto a contestare tale priorità al *De Nanzio,* al

[1] *Recueil de Méd. Vétér.* 1837, pag. 552.

[2] Nella grande *Enciclopedie* del D'ALEMBERT nè altrove non ho potuto trovare il passo a cui alludono gli AA. Esiste?

[3] *Nouveau Dictionnaire pratique de Méd. Chir. etc. Vèt.*, vol. III, 1857, pag. 378.

Digitized by Google

quale peraltro accordavano il merito d'avere richiamato in vita una pratica oramai dimenticata; alla quale fu poi data la denominazione di *fuoco alla De Nanzio.*

Praticando invece delle ricerche al riguardo, si trova già descritta la cauterizzazione sottocutanea in Italia molto prima del *Ruini* (1590), e senza rimontare a' greci e romani, io trovai che già *Guglielmo di Fiandra,* ricordato più sopra, al capo CXXII, de' suoi *Additamenti* all'opera di *Giordano Ruffo sulle malattie de'cavalli* (Bibl. Ambrosiana: *Manuductio ad reperiendos manuscriptos codices* etc. sotto la lettera F. (*Flandria*) ed al n. 43 parte inferiore dei MSS.) sotto la rubrica *A lo spauento* (spavenio osseo) insegnava di *atterrare il cavallo sì che non possa nuocere,* poi si fenda col *fledino* o fiamma da salasso *in capo allo spavento tanto del cuoio e della buççа* che vi si possa metter dentro *lo ferretto ad cuocere* (cauterizzare) *lo spavento* ecc.

Ed in quel turno di tempo *Lorenzo Rusio* romano nel suo *Liber marescalciae,* intitolato in edizioni posteriori *Hippiatria sive marescalia,* al capo LXXXI, pag. 71 dell'ediz. di Parigi del 1532, rubrica *De Curtis* (flemmoni?) *equorum,* così dice:

Cura, scindatur corium in medio Curtae... sub inflatione... et latum ferrum calidum per totam Curtam immittatur, ita quod corium non comburatur etc. E nella traduzione italiana pubblicata dal *Tramezino,* Venezia 1548, tale periodo è voltato in questo modo:

« taglia il cuoio sotto il tumore e metti per tutta la curta un ferro lato e caldo; di modo però che non s'arda il cuoio ».

Ora, siccome del testo latino del *Rusio* si fecero in Italia, in Francia ed in Germania parecchie edizioni e se ne fecero traduzioni diverse in varie lingue ed anche in dialetto

Digitized by Google

siciliano, le quali si sparsero numerose, tanto manoscritte che stampate; e siccome il primo capo testè citato si riferisce a malattia frequente ed importante, così è lecito credere che la cauterizzazione sottocutanea fosse conosciuta assai largamente e praticata; e la si trova infatti ricordata in varii scrittori posteriori al *Rusio* ed al *Di Fiandra* fino alla metà del secolo XVIII. Difatti ne troviamo fatto cenno non nel *Ruini* in Italia, non nel *Bourgelat* in Francia;[1] ma in altri scrittori ed eccone le prove.

Devo qui premettere che alla squisita cortesia dell'egr. collega ed amico dott. *Antonio De Bonis* di Velletri son debitore d'un assai importante e voluminoso MS. cartaceo di veterinaria, di pag. 1067, della dimensione di mm. 28×43, in caratteri non eleganti, ma chiari, piccoli, neri, rubricato in rosso, il quale porta il titolo:

« Veterinaria metodica pratica | e completa di Giuseppe Zioni | Opera | necessaria à i Maniscalchi con un Farmaceutico nel | fine per comodo di poter | sapere la forza determi | nativa d'ogni semplice | e d'ogni composto e sostitui | re un ingrediente ad | un altro che | mancasse.

Nos rimedia (*sic*) Deus salutem
L'anno 1776 ».

(Colgo qui l'occasione per ringraziare vivamente il gentile Donatore, che mi spediva per mezzo del cognato suo Conte D.r Avv. Achille Pecci, egli pure nostro allievo egregio, tale MS. pieno di meravigliosa erudizione e, per il tempo in cui fu scritto, di profonda dottrina. Di tale opera spero di poter in avvenire pubblicare un cenno bibliografico più esteso).

[1] Il RUINI ed il BOURGELAT parlarono della cauterizzazione inerente profonda, non di quella sottocutanea.

Digitized by Google

Nel capo 19, pag. 51, lo *Zioni* tratta dei *Cauterii; modo ed utile,* in questo modo: « Li cauterj a fuoco o sia il fuoco coperto sono d'un inesplicabile benefizio. Questi si fanno col fendere trasversalmente la cute ed alquanto scarnare sotto di essa. Indi introdurvi un canello di lata aperto in questa guisa (*e qui è una rozza figura, nel testo*) acciò la cute non rimanga concotta, ed in tale canello vi si introduca una punta di ferro, o di rame infuocata, e si cuoce la carne senza cuocere la cute, per cui poi non vi rimane segno veruno, Questo piccolo fuoco opera in meno di 24 ore, tocca il luogo del bisogno, e ben tosto comincia ad espurgare il male » ecc.

Ed a pag. 52 dice: « Un altro modo di dare il fuoco coperto con bottoni infuocati si è fendere longitudinalmente in pendenza la cute solamente, e questa tenerla allargata con uncini di ferro; indi in mezzo del detto taglio toccarvi con un bottone di ferro o di rame infuocato. Questo modo di dar il fuoco coperto si può dare in tutte le parti della corporatura, e perfino nelle gambe purchè in queste venghi dato da mano pratica, legiera, e che il ferro non sia rovente mà solo cocente ».

Segue poi un paragrafo, in cui lo *Zioni,* citando il *Dottore Tissot,* § 407 *dell'Avviso al popolo, Vanswieten, Commentario agli Afforismi di Boerhave, Haller, nova physiologia, Bordeu Teofilo, Dizionario d'anatomia e phisiologia, Winslow, Esposizione anatomica* ecc., il Dottore *Carlo Gandini, dei mali venerei,* discorre della tela cellulare sottocutanea e del comportarsi di questa dopo l'applicazione del fuoco coperto. Quindi passa a parlare del *fuoco scoperto,* del modo di applicarlo e dell'azione di esso.

Ed a pag. 290, dopo indicate le cure interne della Pleuritide e Peripneumonia, compresa *la Paracentesis tra la quarta*

Digitized by Google

e quinta costata, vista a praticare in Madrid da uno de' suoi Maestri, *Don Giuliano Antonio Del Cerro,* e parlando dei rivulsivi, dice « così sarà necessarissimo introdurre l'elleboro nero vero avanti al petto e contemporaneamente dare il fuoco coperto nel basso delle costate, come a § 19, pag. 51, in ambo i lati vicino à gomitelli delle spalle, tenendo poi esso fuoco aperto per 15 giorni, affine che col mezzo di una penna untata di strutto ivi introdotta possa la materia espurgarsi ».

Ed anche in questo capitolo come in tutto il libro sono numerose e minutamente indicate le citazioni d'altri scrittori di medicina umana e veterinaria, citazioni, parecchie delle quali io ho potuto e voluto controllare, trovandole esattissime.

Ciò esposto, è necessità concludere che non al *De Nanzio* spetti il merito d'aver ideata, proposta ed applicata prima la cauterizzazione sottocutanea, che dà realmente in casi assai gravi dei risultati che indarno si spererebbero da altre cure; ma che a lui spetti indubbiamente quello d'averla alquanto modificata e di averla diffusa quale direttore della Clinica zooiatrica chirurgica di Napoli, e col presentare alla R. Accademia di medicina di Parigi la memoria sovra citata, la quale fu tosto conosciuta in Francia largamente, poi si diffuse presso le altre nazioni.

Potrei dimostrare che varie altre cose chirurgiche, ora ritenute come moderne, contano invece già alcuni secoli di vita, p. e. le staffe di filo passate attraverso ai margini delle ferite chirurgiche per divaricarli e lasciar maggiore campo e comodità al chirurgo per compiere il suo intervento più profondamente, ripiego semplice quanto ingegnoso ed utile, che viene ascritto al *Bassi,* mentre già lo *Zioni* stesso ed altri se ne valevano molti anni prima, e lo

Digitized by Google

consigliarono; ma non credo di prolungare ulteriormente questa rivista.

Dalla quale io ritengo si possa trarre la conclusione che, prima di dare o d'accettare come novità o come scoperta una data cosa di scienza o di pratica, sia molto prudente il verificare con ampie e diligenti ricerche se dessa sia realmente tale, per non incorrere nel pericolo di passare per plagiario. E da questo pericolo non ci possono salvare che gli *studii storici* e *bibliografici* su quella parte dello scibile, alla quale noi dedichiamo la nostra attività.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 5.

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI

Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. III

(XI DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 3.°

PISA
TIPOGRAFIA EDITRICE DEV. F. MARIOTTI
Piazza dei Cavalieri, 6
1881

Digitized by Google

V.

PROF. BIAGIO BRUGI

IN MEMORIA

DI

CARLO FRANCESCO GABBA

COMMEMORAZIONE

LETTA NELL'AULA MAGNA DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA
ADDÌ 21 FEBBRAIO 1921
PER DELIBERAZIONE DELLA FACOLTÀ DI GIURISPRUDENZA.

Digitized by Google

Digitized by Google

Eminenza Reverendissima,
Magnifico Rettore,
Signore, Signori,

Al cadere della prima neve solevano gli antichi scolari delle nostre Università bussare alle case dei cittadini e chieder l'obolo per eriger monumenti ai defunti maestri. I cortili e le aule dello Studio divenivano così, di anno in anno, quasi un libro di storia sempre aperto agli occhi dei maestri e dei discepoli; i quali, leggendolo ogni giorno, si sentivano strettamente congiunti ai maestri e ai discepoli di ieri. Questa successione di generazioni intese ad un comune lavoro non pure era sentita nella tradizione e nelle leggende fiorenti entro le nostre corporazioni, ma veduta nei monumenti. E quante e quante volte, nel corso dei secoli, in queste nostre aule echeggiò la parola di elogio e di rimpianto; e parve che mentre l'oratore parlava, un perduto maestro tornasse per un istante sulla cattedra deserta! Dolce illusione vicina alla realtà. Parla in noi il maestro; il nostro pensiero è il pensiero di lui che, più o meno trasformato, trasmettiamo a coloro che verranno dopo di noi. Non desiderio di vane pompe, ma desiderio di affermare

Digitized by Google

solennemente la continuità dell'umano pensiero serbò nei nostri secolari Studi il pio costume di commemorare i maestri.

Ed io qui, compiendosi l'anno dalla morte di Carlo Francesco Gabba, onore dello Studio nostro e di questa città che Egli tanto amò, rievoco la cara immagine di lui nel conspetto della Sua Famiglia tuttora percossa dal dolore; delle autorità; dei colleghi; degli scolari; dei cittadini pisani. Torna Egli in effigie, accanto ad altri grandi, in quest'aula, asilo del sapere; io l'addito con riverenza ai nostri cari giovani che il Gabba non conoscono se non per fama: ai giovani a cui affidiamo il tesoro delle glorie di famiglia. Ai nostri scolari che sanno gli eroismi della guerra come della pace!

Giorno di lutto non pure universitario, ma civico fu questo or fa un anno; il lutto di oggi dev'essere temperato dal pensiero che non tutto ci rapì la tomba, se Colui che vi fu chiuso, fra le nostre lacrime, vive immortale nella storia della giurisprudenza italiana!

Ma che cosa sarebbe la mia debole parola, se non esprimesse, più che il mio pensiero, quello dei presenti e dei lontani, i quali formano la numerosa legione degli scolari di tanto maestro, degli studiosi delle opere sue? Lasciano appunto i grandi maestri dietro a sè un'invisibile e, direi quasi, anonima coorte di discepoli senza che questi neppur sempre fra loro si conoscano. Se fossero tutti presenti, nessun'aula potrebbe contenerli: non pochi di essi si maraviglierebbero di trovarsi insieme, poichè lo stesso seme gettato dal maestro diversamente fiorì nelle anime loro.

Quando nella solitudine del mio Studio io tento ricomporre la tradizione giuridica italiana (che la nostra inconsulta imitazione degli stranieri ci fece perdere di vista) e

Digitized by Google

mi tornano innanzi, come in catena interminabile, i nostri grandi legisti, viva commozione mi assale. Più ancora mi sento oggi commosso additandovi fra quegli avi del nostro spirito un altro dei miei maestri, a me poi pregiato amico. Dei miei maestri pisani già copriva da molto tempo la terra Francesco Carrara, Saverio Scolari, Filippo Serafini. Restavano a me, che pur salgo negli anni, di dolce conforto e di paterno consiglio sempre larghi, Carlo Francesco Gabba e Francesco Buonamici, il grande filosofo e civilista, il grande entusiasta del diritto romano. L'uno ci è tolto, l'altro non intende più quanto io l'ami. Ma tutti questi maestri sono vivi alla gloria; ed io ora, in nome di coloro che furono colleghi del Gabba, in nome dei suoi discepoli, lo proclamo benemerito della scienza italiana e dello Studio pisano. Egli ha, per dirlo alla romana, diritto al trionfo. Celebriamo unanimi il trionfo di lui!

Nè io voglio seguirne a passo a passo gli scritti numerosi e tediarvi con fredde recensioni o minute discussioni altrove a suo luogo, non qui. Io vorrei, se potessi, farvi tornare innanzi agli occhi la figura del maestro, sia pure per un istante. Eccolo. Egli traversa il cortile, dritto nella persona e con piglio quasi militare: lindo è l'abito, signorile il tratto, severo e scrutatore lo sguardo, ma non privo di una dolcezza presso che paterna allorchè si accompagna ad un saluto a destra e a manca. Il maestro sa di essere atteso e s'affretta alla sua aula; infila quella toga che tanto gli è cara; sale in cattedra; dà un'occhiata agli scolari sempre desiderosi d'udirlo e incomincia a far lezione. La parola di lui è italianamente pura; la frase precisa e senza snervante prolissità rispecchia davvero il pensiero, e tutti la comprendono, anche nei punti più difficili. Egli non ha bisogno di artifizi dialettici, di puntelli di logica formale, di

Digitized by Google

stiracchiate analogie, di neologismi altisonanti, di parole e frasi esotiche. Così il Gabba, scrivesse o parlasse, seppe adoperare mirabilmente la nostra lingua; non peccò, mi si conceda la parola, di rinato bartolismo, nè di nuovo barbarismo gabellato per linguaggio della scienza. Il profondo e vasto pensiero del maestro, espresso in forma tanto chiara e, dirò così, trasparente, allargava, come per miracolo, la cerchia delle idee degli scolari: quasi senza che noi ce ne accorgessimo, vedevamo ciò cui neppure avremmo pensato un momento prima. E ci pareva che le distinzioni scolastiche dei corsi universitari fossero demolite dalla sintesi del maestro; della quale un raggio scendeva in noi.

Soltanto i maestri che hanno singolari qualità possono conseguire quest'ardua meta: e le conservano divenendo scrittori.

Ebbe il Gabba anzitutto una dote, sino a poco fa rarissima. Le scienze insegnate nell'Università vennero divise e suddivise: sorsero i così detti specialisti, la cui ambita fama avrebbe dovuto dipendere dall'esser sapienti in un ramo o ramoscello del sapere trascurando deliberatamente le relazioni intrinseche delle parti col tutto. La determinazione delle diverse cerchie di studio, per renderne possibile una maggiore profondità, fu confusa con una sostanziale diversità di rami del sapere. Fummo accusati di aver copiato servilmente i tedeschi; ma chi insegna nelle loro Facoltà giuridiche è professore, ad un tempo, dei diversi rami del diritto, mentre noi con un rigoroso regolamento di confini inventammo un professore per ogni ramo del diritto! Soltanto l'agilità dell'ingegno italiano ha potuto diminuire i danni di quest'angustia d'idee, che i veri maestri c'insegnarono a dispregiare. Non è necessario saper tutto, ma sentire il legame delle parti col tutto e nel tutto.

Digitized by Google

Il Gabba ci abituava a sentirlo: Egli aborriva dall'isolamento delle discipline; aspirava a quell'unità del sapere, la quale è uno specchio della realtà del vero. Nella mente di lui la filosofia del diritto, il diritto romano, il diritto privato, il diritto pubblico, le scienze sociali e quel tanto che gli sembrava necessario delle naturali si univano e combinavano come aspetti del vero, il quale non può essere rappresentato da ciascuno di essi a sè.

Ed un'altra dote spicca nel Gabba, conforme alla tendenza di tutti i nostri grandi legisti, purtroppo dimenticata talora modernamente: il fine pratico delle dottrine gli appare quale criterio della loro bontà e scopo supremo della giurisprudenza. Lo innamorava la speculazione, come fonte da cui tutto, secondo lui, doveva derivare; ma la sua speculazione, che nei fatti aveva radice e ad essi tornava, era ben diversa da quei trastulli di astrazione e di oscura metafisica, di cui si compiacciono gl'ingegni degl'impotenti e degli egoisti. Anche nella scienza si può distinguere il lavoro di questi, che è improduttivo, dal lavoro del Gabba largamente produttivo. Tutto per lui doveva essere illuminato dalla luce della scienza e con questa ammodernato e migliorato. Non era la Facoltà di legge, per il Gabba, una specie di isola dei morti, dalla quale rifuggono i vivi, ma l'officina sonante del pensiero giuridico e sociale che dai maestri passa negli scolari e da questi si propaga alle moltitudini. Il passaggio del maestro da una cattedra all'altra non fu del tutto casuale: lo faceva propendere ad esso la nativa indole dell'ingegno. Il filosofo del diritto di pratica tendenza non avrebbe potuto rifiutare una cattedra di diritto civile: il civilista filosofo del diritto e perfetto conoscitore dell'ordinamento giuridico della società civile, doveva esser lieto di affrontare con quella tendenza e con

Digitized by Google

questo corredo di dottrina le ardue questioni della sociologia. Così la mente del Gabba (che in sè tutte le parti della giurisprudenza componeva in bell'armonia) trovò nella condizione delle cose il miglior mezzo di perfezionarsi.

Ma il segreto della grande efficacia del Gabba come maestro e come scrittore è anche un altro. Egli amò la cattedra: l'amò nella prima giovinezza; l'amò nel vigore dell'età; l'amò quando il peso degli anni piombò invano su lui, sì che sembrava ancora a tutti forte del corpo e più dello spirito. Qual differenza da coloro che hanno per la cattedra un tiepido affetto; che non sanno rassegnarsi al sacrifizio dell'insegnamento! Infatti la ricca borghesia avida di materiali godimenti, anche quando ebbe il monopolio dello Stato, mostrò, per lo più, di non comprendere la letizia dello studio e il capitale della scienza. Il proletariato, a mano a mano che sale verso il potere, pare che contesti, secondo anche la dottrina di alcuni economisti, ogni carattere di lavoro al lavoro intellettuale. Sacrifizio resta lo studio, sacrifizio l'insegnamento anche in queste scuole un tempo tanto onorate da imperatori, da pontefici da liberi Comuni! Ormai soltanto alcuni nobili spiriti, (a cui poco importa della generale dimenticanza e che considerano l'insegnamento come un sacerdozio) non perdono la loro fede nella scienza, sebbene le classi politicamente rivali si accordino fra loro nel giudicarli oziosi. Il Gabba era di questi nobili spiriti; e quando pure fu degnamente nominato senatore del regno, restò il professore Gabba; non si mutò nel senatore Gabba. La solitaria casa di via Santa Maria non veniva da lui lasciata che raramente: interrompere lo studio, d'onde dovevano scaturire libri originali ed efficacissime lezioni, pareva fosse per lui venir meno ad un dovere! A Roma correva per qualche importante vota-

Digitized by Google

zione in Senato o per qualche commissione, sempre impaziente di tornarsene al proprio nido pisano, che io dissi un giorno, visitando il maestro: il regno delle idee. È naturale che l'ingegno del Gabba acuito e rafforzato da una lunga e svariata preparazione scientifica, lo conducesse ad esprimere in modo sicuro e quasi dogmatico certe opinioni e dottrine. Esse facevano parte di quel regno delle idee, del quale il maestro era signore: affermarle recisamente sembrava a lui far persuasi tutti che non erano improvvisate, ma sottoposte alla critica, attaccate già mentalmente con ogni possibile obiezione, uscite vittoriose dalla critica e dalle obiezioni. I profani, e tutti coloro che nascondono la superbia e l'intolleranza in un'apparente e untuosa modestia, trovarono talora il Gabba superbo e intollerante nelle sue recise affermazioni. Non è vero. Se rispose con opportuna violenza a chi, per leggerezza, per spirito di parte o per petulanza lo avesse contradetto, mostrò perfino rispetto e benevolenza a coloro che lo contradicevano per diversità di convinzioni. Fui proprio io, seguace del positivismo professato qui dallo Scolari, l'ardito ma rispettoso discepolo, il quale in una lezione di filosofia del diritto dichiarò, su domanda del maestro, di creder diversamente da lui, alla possibilità di una metafisica positiva. Risero i miei compagni di un riso tra il beffardo e il compassionevole; ma il Gabba lo fece morir tosto sulle loro labbra sclamando che d'ora innanzi non sarei stato soltanto un suo scolare, ma un suo amico. L'aneddoto non sia preso qui che come indizio della bontà di un grande verso un piccolo. Il Gabba si condusse egualmente in tanti altri casi. Fra gli ammiratori di lui, molti furono suoi contradittori, che Egli non di rado apprezzò ben più di alcuni perpetui lodatori; i quali alzando sempre il turribolo verso l'insigne

Digitized by Google

uomo, cercavano con l'aiuto di lui, di mutarsi da pigmei in giganti. O buono amico Carlo Lessona, perchè non sei tu qui ancora fra noi, tu, tanto stimato dal Gabba, da cui pur talora apertamente dissentivi?

Il maestro che onoriamo aveva dato tutto se stesso a questa Università, dove insegnò dal 1861 al 1917 dapprima filosofia del diritto, poi diritto civile conservando per incarico l'insegnamento di quella sua diletta disciplina. Se queste furono le cattedre in cui ebbe il grado di ordinario, ne tenne altre per incarico, come il diritto internazionale e il diritto romano mostrandosi padrone anche di queste discipline. Ed io ricordo certe lezioni di lui sulla legislazione comparata che a me facevano l'effetto di un viaggio attraverso terre vergini, come le lezioni di pratica legislativa penale del Carrara. Non a torto parlai di glorie di famiglia!

L'opera del Gabba insegnante è quella stessa del Gabba scrittore: felice connubio della scuola col libro, onde l'una e l'altro divengono più efficaci. Opera multiforme che si può ripartire nelle usuali categorie di corsi e discipline; ma è una per sostanza, per metodo, per tendenze. Per comprendere i libri, le monografie, le note forensi, le lezioni, le conferenze del Gabba non basta vedere se ha raggiunto sempre lo scopo che si proponeva. Bisogna indagare, fuori anche del caso speciale, quale fosse il proponimento e, direi quasi, il programma generale di lui. È proprio soltanto dei grandi ingegni di formarsi questi ideali programmi, di cui ravvisiamo a fatica la logica unità a traverso le più svariate manifestazioni. Spesso anche, essendo essi dei precursori, più difficile riesce dapprima colpire certe loro tendenze Quando poi queste hanno trionfato, può anche sembrare

Digitized by Google

che quei dotti di pochi anni prima, pressochè niente abbiano fatto o siano stati dei timidi. Giustizia vuole che del Gabba si parli come maestro e come scrittore riportandoci col pensiero e con l'animo nostro in quegli anni in cui Egli fiorì: anni non lontani, eppure, per certi aspetti, così diversi dai nostri!

Le Università italiane, quando Egli cominciò ad insegnare, appena si destavano come da un lungo sonno: nelle Facoltà di giurisprudenza certi corsi avevano del puerile; si ripetevano, senza critica, dottrine antiquate; mancava ogni vigore di speculazione; tutta la scienza del diritto pareva ridotta a spiegare pedestremente la legge. L'Università di Pisa fu una delle prime, forse la prima, a risorgere dopo la costituzione del regno d'Italia. Il Gabba vi giunse con un forte corredo di dottrina, con vigore d'ingegno, con animo ardito e indipendente; ma ebbe pure la somma ventura di trovarsi fra colleghi eminenti e di sentire che il proprio disegno di rinnovare la giurisprudenza era dell'intiera Facoltà. In quegli anni la città tutta quanta ammirava il Carrara, il Serafini, il Gabba; era superba del Buonamici, come di un proprio figlio che di giorno in giorno saliva la scala degli onori: l'ammirazione della città serviva di stimolo agl'insegnanti e dava loro nuova lena. Il Gabba sapeva che gli occhi dei pisani erano sempre su lui; che le sue opere eran conosciute anche da chi non le comprendeva; che era un maestro, il cui nome correva sulla bocca di tutti, fossero anche umili persone, con cui non sdegnava talora d'intrattenersi in familiare colloquio. Così egli non fu un eremita o un pedante che voglia rinnovare il mondo guardandolo soltanto attraverso una lente, o un uggioso moralista che predichi da mattino a sera morale, virtù, sentimento religioso per vender bene questi

Digitized by Google

titoli di credito alla Borsa degli onori. Fu sempre un uomo, che, dalle sue stesse conoscenze ed amicizie in tutte le classi sociali, traeva continua energia per il proprio intelletto osservatore; continua spigliatezza di parola; continuo desiderio di rispondere degnamente alla fiducia che sapeva aver tutti in lui. Chi ha udito le sue lezioni (ed i libri non discordano da esse) ricorderà la sveltezza del discorso, il brio, le frasi colorite dal maestro, che fanno subito pensare alla conversazione di colte persone. Ond'è che anche nei punti in cui il Gabba è più originale e precorre l'avvenire, parla in forma semplice e bonaria, quasi conversando con lo scolare o col lettore. E quanti sono questi punti luminosi!

Per giudicare il Gabba come filosofo del diritto non bisogna prendere a criterio certe tendenze che, dopo di lui specialmente, sono penetrate nella filosofia del diritto, anche fra noi, con grandi pretese, ma col risultato unico di renderla una disciplina astratta e le mille miglia lontana dalla realtà della vita. Il Gabba fu uno dei maestri, i quali più hanno giovato alla trasformazione dell'antico diritto naturale in filosofia del diritto: cioè a dire, a far di questa una scienza, la quale non fonda tutto sull'individuo (quasi esso potesse vivere a sè e per se solo); ma lo esamina e lo segue a passo a passo nell'umana società, da cui non si può staccare che con dannosa astrazione. Non farà meraviglia dunque che per il Gabba la filosofia del diritto fosse una scienza chè ricerca i più generali principii a cui si possono ricondurre i fenomeni sociali. In un tempo in cui si era come oscurato l'aspetto sociale di tutti i diritti dell'uomo, il Gabba ebbe il gran merito di sottrarli a quell'egoismo individuale che si confondeva, magari in buona fede, con la ragione stessa del diritto.

Digitized by Google

Ma dell'antico diritto naturale Egli serbò la bella tendenza a penetrare con spassionato esame in tutti gli instituti giuridici e sociali; a fare insomma una critica di tutto il diritto positivo, la quale a noi giovani di allora (credo i giovani di oggi non la pensino diversamente) sembrava il più alto compito della filosofia del diritto. È naturale che il criterio dell'utilità sociale non fosse mai trascurato dal maestro nell'analisi degli instituti, neanche per il divorzio. Nelle lezioni L e LI del corso del 1875 egli espose il pro e il contro in riguardo del divorzio e conchiuse che in linea astratta il divorzio è più ammissibile che l'indissolubilità, ma si debbono soprattutto considerare le reali condizioni dei diversi paesi. L'antico campione del divorzio si disponeva già qui a mutarsi in avversario di esso; mutazione predicata ai quattro venti dagli antidivorzisti, i quali non sempre ricordano che avvenne per quello studio della realtà sociale che fu un gran merito del maestro. Chi più studia, più è soggetto a ricredersi!

Il buon seme nascosto in queste lezioni di filosofia del diritto doveva fruttare rigogliosamente nelle conferenze fiorentine « Intorno ad alcuni più generali problemi della scienza sociale ». Poco o niente aveva contribuito l'Italia agli studi di sociologia quando il Gabba nel 1876 pubblicò la prima serie di quelle conferenze. È anche vero che molti fra noi diffidavano di questa che doveva essere, secondo il suo fondatore Augusto Comte, una scienza del fatto sociale e sembrava invece, per molti che se ne vantavano cultori, inventata a posta per accogliere come dottrina tutto ciò che passava per la loro testa. Il professore pisano di filosofia del diritto, divenuto sociologo con una transizione naturalissima, mostrando subito piena conoscenza di tutti gli autori d'oltr'alpe che avevano fatto fiorire una disciplina pressochè

Digitized by Google

ignorata o fraintesa tra noi, esortava calorosamente ad essa gl'italiani! Il rigore del metodo, la sicurezza dell'analisi, la ragionevolezza delle sintesi, le relazioni che senza sforzo o artificio apparivano tra i fenomeni sociali persuasero subito i diffidenti, meglio di tante difese della sociologia, che anch'essa aveva diritto di esser considerata come scienza. Nè fu piccolo merito del Gabba, maestro qui pure a fatti più che a parole. Legga ogni colta persona le tre serie delle conferenze, tuttora fresche come se ieri fossero scritte, e se ne persuaderà tosto! Ci si addentra con esse in tutti i più ascosi recessi del pensiero e del sentimento sociale: il maestro ci svela l'intiera struttura e, direi quasi, la fisiologia del civile consorzio. Ma qui, ben ci ammonisce, tutto non dipende dal diritto: le umane società vivono d'idee, di sentimenti, di aspirazioni che col diritto cooperano o lo scalzano per mutarlo. Ed eccovi le analisi indimenticabili della pubblica opinione; dei contagi delle idee, oggi più che mai frequenti; del carattere nazionale; della proprietà; dei partiti politici; del sentimento religioso. Chi medita le osservazioni del Gabba sul valore sociale della religione, si persuade subito che la fede religiosa di lui derivò da convinzione scientifica. Ma Egli restò sempre fedele alla tradizione secolare delle nostre Università che il potere civile e lo spirituale hanno cerchia distinta. Anche le eleganti ed erudite pagine di lui sulla questione femminile, che disse « questione sociale per eccellenza » mostrano il sociologo; il quale vuol sostituire all'astratta considerazione dell'uomo e della donna, come individui equivalenti, la considerazione del diverso loro valore sociale e della diversa loro missione. Quindi gli ripugna che la donna prenda il posto dell'uomo nei pubblici ufficii e nelle professioni; ma la realtà della vita scuote

Digitized by Google

il sociologo innamorato di un modello ideale di civile consorzio: Ei prevede il triste futuro in cui i bisogni quotidiani avranno livellato la donna all'uomo e fa ansiose domande su ciò che avverrà, senza voler dare una risposta. Il libro di lui sulla condizione della donna mi sembra un elegante peristilio di un edifizio deliberatamente lasciato a mezzo.

La cattedra di codice civile della nostra Facoltà giuridica già dall'anno scolastico 1875-76 aveva preso il titolo di cattedra di diritto civile. È giusto dire che il titolare di essa, Fausto Mazzuoli, nei suoi anni migliori si era veramente sforzato di nobilitare l'insegnamento col sostituire all'esegesi del codice una trattazione dottrinale del diritto nostro. Quando nell'anno scolastico 1887-88 il Gabba tornò come ordinario a quella cattedra di diritto civile, in cui aveva provvisoriamente supplito il Mazzuoli negli anni del suo rettorato, la Facoltà giuridica pisana potè vantarsi a ragione di primeggiare in Italia anche per l'insegnamento del diritto civile. Il 15 dicembre 1887 il Gabba tenne la sua prolusione, il cui oggetto era così determinato dal maestro: « Concetto del diritto civile. Piano di una trattazione sistematica del diritto civile ». Fu veramente una gioia per il manipolo, allora non troppo numeroso, dei desiderosi d'infondere nuovo sangue nel nostro diritto civile; di purgarlo definitivamente dalle volgarità e superficialità di coloro i quali non si erano ancora emancipati dai commentatori del Codice Napoleone o del Codice austriaco; di salire dall'esegesi degli articoli ad un sistema, quale già i romanisti avevano pronto in ogni sua parte. Cominciava il Gabba la sua prolusione asserendo di essere « non nuovo agli studi del diritto civile ». Bene a ragione poichè Egli, per tacere di altri scritti, aveva costruito il

Digitized by Google

monumentale trattato della retroattività delle leggi, in cui la riconduzione del particolare al generale e l'ascensione a sommi principii fanno fede di una maravigliosa mente sistematica. Egli aveva pure, giorno per giorno, fatto udire la propria voce di grande civilista teorico e pratico in quelle note forensi raccolte poi in volumi, le quali additarono spesso nuove vie al diritto civile e resero pieghevole la legge tanto quanto avevano i nostri antichi reso pieghevole il testo romano! Ma Egli saliva ormai stabilmente la cattedra di diritto civile anche con un tesoro di cognizioni sociologiche che lo rendevano immune dalle illusioni, allora pressochè generali fra noi, sul pregio scientifico del nostro codice civile, e in genere dei codici. I codici hanno grande importanza politica per cementare l'unione nazionale di un popolo risorto a libera vita; ma i loro articoli sono formole per lo più difettose perchè non abbracciano tutta quanta la realtà del diritto. Il sociologo sa che le idee le quali agitano i popoli, sono spesso indeterminate e fantastiche. Come ridurle in precisa formola di legge? Noi, nella lodevole fretta di rafforzare i vincoli della famiglia italiana, avevamo creduto che la categoria scolastica e politica codice civile comprendesse tutto il diritto civile o diritto privato che dir vogliamo. Ecco il Gabba affermare a ragione, non senza meraviglia di alcuni, che tutto quel diritto non è nel codice, abbracciando, oltre i convenzionali confini di questo, tutte « le pretenzioni a umane utilità » anche nei rapporti fra gl'individui e lo Stato. Il quale, fuor della sua missione sovrana, veniva così, nella cerchia di quelle pretese, ricondotto sotto l'impero del diritto civile. Alla vasta unità del diritto privato non sfugge nella mente del Gabba il diritto commerciale da lui considerato « come una sottospecie » del diritto civile,

Digitized by Google

che si allarga d'altra parte, con originali idee di lui (degne di profonda discussione), sino al punto in cui diviene diritto civile internazionale.

Appena oggi è caduto il pregiudizio che il civilista non debba guardare, fuor del classico palagio del codice civile, le umili, ma numerose casupole che gli son cresciute attorno e, con lo scopo di ampliarlo, lo modificano, lo sformano, lo fanno in parte crollare. Così è. Le leggi speciali sono state e sono, nolenti o volenti i bigotti della logica, l'unico modo di ringiovanire il codice civile e di farne cadere le parti morte. Il maestro già nella sua prolusione affermava che il diritto privato vigente in Italia si deve rintracciare non soltanto nel codice, ma altresì in ogni e qualunque legge che ne contenga una qualche parte o frammento. Oggi noi non facciamo che seguire l'ammonimento di lui. Ma l'eminente sociologo, parlando da civilista, nón poteva dimenticare quell'incessante moto delle umane cose, che Egli aveva già descritto in modo egregio sin dal 1858 nel proprio lavoro premiato dalla reale accademia del Belgio sulla vera origine del diritto di successione. Descritto, dico, prima ancora che lo Spencer formolasse la dottrina dell'evoluzione, divenuta poi di moda! Nella fiumana, che spesso si muta in torrente, in cui noi con le cose nostre, credute più stabili, siamo di continuo trascinati senza saper dove, possono forse i codici frenar la corrénte e star saldi come torre che non crolla? La gran voce della scuola storica dei giuristi si udiva nelle parole del Gabba (sebbene non in tutto seguace di questa) allorchè affermava il pericolo che il codice civile facesse credere ai più racchiuso in esso non pure il presente, ma l'avvenire del diritto. Piaceva al maestro la libera scienza, tutt'al più aiutata da qualche legge, e sorretta dall'« inesauribile fecondità del diritto

Digitized by Google

romano » per seguire a passo a passo e rispecchiare « lo spontaneo svolgimento della vita nazionale ». Così è in gran parte avvenuto. Il nostro codice civile è ormai sopraffatto da leggi speciali e dalla scienza: noi cerchiamo affannosamente di ridurre a sistema i più svariati elementi di diritto.

EMINENZA REVERENDISSIMA,
MAGNIFICO RETTORE,
SIGNORE, SIGNORI!

Quali grandi ammaestramenti derivano per noi dell'opera del Gabba in questo momento in cui tutto il civile consorzio sembra scosso e pericolante! Come la scienza di lui è viva scienza della vita se l'ascoltiamo! Non sono no le Università fari spenti sulla riva da cui il mare si è ritirato, ma fari luminosi fra le onde in tempesta. Si volgono a noi le genti umane affaticate, anche quando, nello scoppio dell'ira e nel furore della ribellione, maledicono la scienza. Questa solo può dar loro ciò che esse invano cercano in quell'ira e in quel furore: il modo di ricostruire sulle rovine. Ma è necessario aver la fede del Gabba nella scienza, e non perderla fra i disinganni e i dolori dell'ora che viviamo. E dev'esser fede, al pari di quella di lui, tutta animata da idee morali, che sembrano pressochè offuscate nell'anima di ognuno, parli esso da solo o concorra a formare il clamore dei partiti politici e delle classi. L'opera più che millenaria della civiltà nostra non può esser ridotta ad una lotta per il maggior godimento materiale senza le gioie spirituali. Ma potrà scagliare la prima pietra soltanto colui che abbia purificato il suo spirito dall'assil-

Digitized by Google

lante desiderio di sùbiti guadagni, sia egli in alto o in basso, ed abbia veramente compreso il concetto, come dicono, di solidarietà sociale: cioè a dire di un'armonica cooperazione di tutti i fattori di un civile consorzio! Oggi è più che mai vivo il bisogno di quegli studi di scienza sociale a cui il maestro esortava gl'italiani. Niuno ardirebbe oggi predicare apertamente dottrine antigieniche o far propaganda di uso di veleni; ma lo Stato moderno (che sa per esperienza l'inutilità dell'inquisizione e della censura ed ha per fondamento la libertà della discussione) deve talora permettere la propaganda di dottrine più o meno apertamente pericolose, non pure per l'una o per l'altra classe, ma per tutto intiero l'ordinamento sociale. Tocca a noi, anche fuori di questi templi della scienza, di dire il vero, sia che ci lusinghi l'applauso, sia che ci colpisca l'incosciente grido della disapprovazione. La scienza sociale del Gabba, superata una prima fase aristocratica entro la scuola, aspirava a farsi democratica divenendo regola di condotta di ognuno e di tutti. Si suol dire che gli Stati liberali e il liberalismo stesso nacquero da idee astratte, malcombinate fra loro ed incerte nella misura dell'applicazione. Forse che le moderne tendenze sociali possono vantarsi di trarre la loro forza da idee e dottrine sicure e precise? Poneva il Gabba a fondamento delle sue conferenze di scienza sociale una continua e spassionata critica di tutto e di tutti. I popoli, i partiti politici, i proletari buoni, ma ignari come fanciulli, attendono da noi, con un linguaggio che essi possano comprendere, quest'imparziale critica dei nostri ordinamenti sociali. Cada ciò che deve cadere: resti ciò che ha da restare! E diciamo a tutti, col maestro, che il legislatore non è un taumaturgo, e che le sue leggi e i suoi codici, buoni appena per un attimo fuggente della

Digitized by Google

vita di un popolo, non hanno virtù di curare le piaghe sociali se non le curiamo noi stessi. Avvelena tutto il consorzio civile e ne svia i naturali congegni un cieco odio di classe, che fa confondere certe transitorie forme del potere con la imprescindibile sua necessità sociale; rende deboli i nostri migliori instituti, inefficace la legge. Non l'odio, ma l'amore, espressione morale dell'armonia di tutti quei congegni del nostro consorzio, guiderà i popoli alla pace sociale. La scienza della civile società, in cui Carlo Francesco Gabba ci ammaestrò, dice ad essi con le parole di un grande poeta:

> Noi troppo odiammo e sofferimmo. Amate,
> Il mondo è bello e santo è l'avvenir.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 6.

PISA
TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI
Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

VI.

ARTURO SOLARI

SILVIUM

COLONIA TARANTINA

Digitized by Google

Digitized by Google

Nel 306 a. C. i Romani, durante la seconda guerra sannitica, assediarono Sílvium, che era presidiata dai Sanniti, e dopo parecchi giorni se ne impadronirono facendo non meno di cinquemila prigionieri e prendendo quantitá ingente di bottino.[1] Di Silvium la tradizione letteraria assolutamente tace; ne sappiamo solo quel tanto che ci conservano le opere geografiche, e in quanto ad informazione etnografica e geografica. Cosí Strabone,[2] dopo avere descritto e limitato i Peucezi, detti anche Pedicli, ricorda Silvium che è posta nell'interno all'estremo del territorio abitato dai Peucezi. E dei Pedicli o Pediculi fa cenno la fonte geografica di Plinio, che esso pure li colloca nella zona superiore al territorio di Brindisi, insieme alle città di Mateola, Rubi, Silvium, Venusia.[3] Con Silvium è certamente da identificare il luogo che nelle Guide itinerarie è chiamato erroneamente Silutum[4] e Silitum,[5] posto a non eguale distanza da Venosa sulla via Appia volta verso Taranto:

[1] Diod. XX 80, 1-2.

[2] VI 277 e 283: μέχρι δεῦρο μὲν (Egnazia) Πευκέτιοι κατὰ θάλατταν, ἐν τῇ μεσογαίᾳ δὲ μέχρι Σιλουίου.

[3] Pl. *n. h.* III 38; 102; 105.

[4] *It. Ant.* 121 e *Tab. Peut.*

[5] An. Rav. IV 35. Sull'identificazione giá il Cluverio (*It. Ant.* p. 1224) non moveva alcun dubbio.

Digitized by Google

It. Ant. e *Tab.*		*An. Rav.*
Venusia	Venusia	Venusia
XX	XXXV	
Silutum	Silutum	Silitum
XIII		
Plera		Plera
XIV	XXV	
Sublupatia	Sublupatia	Sublupacia

La tradizione letteraria non si accorda, quanto al nome, con la numismatica, se si deve ritenere che il demotico scritto su una moneta si riferisca alla medesima cittá.

La moneta in questione, secondo i numismatici,[1] appartiene ad una localitá ignota, abitata da un popolo che l'iscrizione del rovescio designa col nome ΣΙΔΙΝΩΝ,[2] al quale nome ci richiama ora anche un'altra moneta che assicura di aver trovato il sig. P. Calderoni-Martini, benemerito studioso delle antichitá e della storia di Gravina, proprio su un colle vicino a questa cittá, chiamato Botromagno, posto sul torrente omonimo di quella, e precisamente alla sua destra, che poi diede nome alla medievale Gravina, situata invece sulla sinistra dell'affluente del Bradano.

Il nome è greco, e ricorda subito altri simili di cittá,

[1] Head[2] p. 49 e Garrucci *Monete dell'Italia Antica* II p. 119.

[2] Il Garrucci però, pur dichiarando di non conoscere il luogo a cui allude la moneta, aggiunge che questi Sidini sono degni di prendere il posto dato a Silvium, per spiegare quel ΣΙ che si legge sopra alcune monete di Ruvo, come iniziale di cittá confederata. Conclude che questi Sidini possono credersi originati dalla Σίδη laconica del seno beatico (Paus. *Lac.* III 22, 11). Noto che il Garrucci scrive, errando, beatico; mentre l'aggettivo è Βοιατικός dalla cittá Βοιαί.

Digitized by Google

che giá furono messi in rilievo [1] da chi prese in considerazione la leggenda della moneta. Ma non si presenta di ugual forma il nome della cittá, che analogamente a quello di altri appellativi con demotici di uguale terminazione, come Βρεντεσῖνοι e Ῥηγῖνοι, dovrebbe essere stato Σίδιον,[2] allo stesso modo che Βρεντέσιον e Ῥήγιον. Poiché non v'ha dubbio che il popolo, che la tradizione numismatica ci ha conservato, è quello dei Σιδῖνοι. Pertanto, anche assolutamente, cioè senza alcuna relazione a circostanze storiche e topografiche, l'avvicinamento dei due nomi, di Σίδιον e Silvium, si presenta molto probabile, ammettendo che l'uno si sia trasformato nell'altro attraverso un intermedio Silium. L'origine cosí del centro è greca, il quale in seguito divenuto latino non ha conservato, come in altri casi, l'ortografia del nome; e, quindi, alterato si è fissato nella tradizione storica e letteraria.

Dove sia stata dunque la cittá di Silvium, di cui Diodoro rileva la importanza strategica,[3] non facilmente si ricava, per il disaccordo dei dati itinerari. Come si è veduto, la Tavola Peutingeriana segna tra Silvium e Venusia una distanza di 35 miglia, mentre l'Itinerario riporta un intervallo di sole 20 miglia; e come è stato osservato giustamente [4] si verrebbe, secondo il diverso computo delle due

[1] Σίδη laconica, citata, nella Panfilia, e nel Ponto. Viene ricordata una Σιδήνη nella Licia e un'altra omonima nella Troade sul Granico.

[2] Il lessico greco ha uguale il nome comune, che indica il frutto del melagrano; σίδιον si presenta poi come diminutivo di σίδη, che significa tanto il frutto quanto l'albero del melagrano.

[3] Non v'ha dubbio che DIODORO, nell'assalto romano a Silvium presidiata dai Sanniti, pur non dichiaratamente, afferma la fortezza del luogo; poiché mette in evidenza che l'assedio durò per parecchi giorni e che l'espugnazione fu in seguito a viva forza (συνεστήσαντο πολιορκίαν ἐφ' ἱκανὰς ἡμέρας καὶ κατὰ κράτος ἁλόντες).

[4] NISSEN *It. Landesk.* II 2 p. 861. Si veda sulla questione topografica di Silvium l'HOLSTENIO (*In It. Ant. Cluverii* p. 281 nota) e il MOMMSEN

Digitized by Google

guide, a situare il centro o nelle vicinanze di Gravina ovvero presso Garagnone. Insomma, seguendo il vario dato dei due itinerari, dobbiamo collocare Silvium o piú vicino a Venosa o piú lontano. Ma lo studio delle misure che ci sono conservate nei vecchi itinerari, col confronto delle distanze odierne che i luoghi citati sulla via Tarantina hanno in riguardo al punto di riferimento di Venosa, permette certamente di concludere che nel dato dell'Itinerario Antoniniano esiste un errore dovuto, come altre volte, al copista.[1] Ed appare l'errore a prima vista dal computo dei chilometri tra i due centri estremi del tratto stradale tra Venosa e Taranto, per cui, secondo la distanza effettiva, il numero dei chilometri è di 139, mentre stando al numero delle miglia dell'Itinerario, l'intervallo tra le due cittá sarebbe di miglia 80 pari, all'incirca, a chil. 118. La differenza di 21 chil. è solo spiegabile, per il fatto che la strada odierna di Venosa-Castellaneta-Taranto percorre l'antico tracciato,[2] con l'omissione del XV da chi trascrisse affrettatamente e sbadatamente il percorso venosino. Del resto che cifra inesatta sia la segnata nell'Itinerario tra Venosa e Silvium può desumersi pure dal fatto che tra la guida della Peutingeriana e quella Antoniniana c'è accordo completo nella misurazione delle distanze successive a Silvium. Infatti nell'Itinerario si segnanò 13 miglia tra Silvium e Plera, e 14 miglia sono in-

(*CIL.* IX p. 26) che, a differenza dell'erudito secentista, rettamente uní Silvium con Gravina. Non contribuirono certamente a risolvere la questione gli studiosi F. M. PRATELLI (*Via Appia* Napoli 1745 p. 479) e G. JATTA (*Cenno storico della Cittá di Ruvo* Napoli 1844 p. 47), confondendo o non bene esaminando i dati itinerari antichi.

[1] V. la mia *Topografia St. dell'Etr.* II[2] p. 28 sgg.

[2] Confermando quanto giá aveva osservato il MOMMSEN, delineò il tratto antico della Via Appia T. ASHBY *Le vie Appia e Traiana* in *Boll. dell'Assoc. Arch. Rom.* VI e VII p. 10.

Digitized by Google

dicate tra Plera e Sublupatia: mentre nella Carta sono numerate complessivamente 25 miglia tra Silvium e Sublupatia, che corrispondono a quelle notate fra i tre centri nell'Antoniniano. Rimane pertanto solo la differenza giá indicata delle 15 miglia nelle due misure di distanza da Silvium a Venosa. E considerato che nella distanza tra Venosa e Taranto la Carta Peutingeriana offre la misura quale risulta effettivamente sul tratto della via percorsa nell'antichitá, mentre nell'Itinerario la somma delle singole distanze dá un risultato inferiore a quello che realmente richiede il tratto Venosa-Taranto, se ne conclude che in quest'ultimo la citazione della misura della distanza tra Silvium e Venosa è errata; e che è giustamente accettabile quella della Carta.

Pertanto i dati itinerari portano al luogo, che la tradizione manoscritta ha deformato in Silutum e Silitum[1] e che i ricordi numismatici dichiarano per Sidion, non privo di reliquie d'una civiltá antica, nella quale è lecito scorgere il succedersi di varie fasi a seconda dell'impronta che lasciava la nuova vita civile. La notizia letteraria conservataci da Diodoro ci dice quello che le monete alla loro volta confermano; cioè dell'esistenza di una colonia greca nella vallata del Bradano, su una via che congiungeva la metropoli tarantina con i punti più avanzati della sua espansione commerciale e coloniale.[2] Prima della colonizzazione greco-

[1] Questa forma in RAV. IV 35.

[2] Si è occupato principalmente delle antichitá di Botromagno T. STAMELLUTI, il quale nelle sue ricerche (*Opinione sull'origine di Gravina in Dispense di Cronaca Gravinese* Gravina 1880 pag. 55) non mancava di studiare e raccogliere tutto quanto contribuisse alla dilucidazione delle varie questioni storiche e topografiche concernenti Gravina. Si vedano anche BONAVENTURA DA LAMA *La cronaca dei minori 'osservanti riformati per la provincia di S. Nicola* 1724 e, in estratto, pubblicata nelle citate *Dispense* p. 3; FILIPPO CIRELLI *Il Regno delle due Sicilie* Napoli 1859, III p. 93 sgg.

Digitized by Google

tarantina il territorio era, secondo la tradizione letteraria, peucezio. Nè è lecito trovare una discordanza nei documenti geografici che gli antichi ci hanno conservato. Anzi i brevi accenni in Strabone e in Plinio c'informano che la regione a cui apparteneva Silvium era dei Peucezi, chiamati anche Pediculi, e che la città era situata all'estremo limite interno di quella.[1]

Quando la civiltà greca abbia esteso il suo influsso da Taranto in questa parte bagnata dal torrente Gravina non è molto chiaro. Certo che al principio del terzo secolo o sulla fine del quarto il centro era greco, come lo dichiara luminosamente la tradizione numismatica.[2] Ma questa non ci porterebbe a concludere per una dipendenza da Taranto o almeno a ritenere che fra l'uno e l'altro luogo fossero stretti vincoli d'interesse economico e commerciale. Piuttosto la natura della moneta, cioè la immagine di Giove laureato nel diritto e la figura, nel rovescio, di Ercole in riposo con gli attributi propri dell'eroe, ci fa collegare la serie del tipo alla monetazione che ricorda la venuta in Italia di Alessandro il Molosso. Ed insieme al tipo Sidino non si può disgiungere un altro tipo monetario che già fu notato per altre parti dell'Apulia e del Bruzio; nel quale tipo è lecito riconoscere il simbolo del principe Molosso.[3] Ma la

[1] Anche i due luoghi di STRABONE e di DIODORO, citati, che parlano dell'etnografia di Silvium, si accordano, quando l'uno pone il luogo nella Iapigia e l'altro nella Peucezia. Sulla eguaglianza dei nomi Peucezi e Pedicli non riteniamo che vi sia ormai dubbio. Cfr. PAIS *St. d. Sic. e d. M. Grecia* p. 378 e DE SANCTIS *St. d. Romani* I p. 167. Del resto STRABONE, nel luogo citato, distintamente parla della identitá dei Peucezi e dei Pediculi.

[2] HEAD *op. cit.* p. 49. Per la grecizzazione del territorio Peucezio si veda il recentissimo articolo *Di una nuova iscrizione di dialetto misto trovata nella Peucezia di* F. RIBEZZO in *Riv. indo gr. ital.* IV 3-4 p. 79 sgg.

[3] GARRUCCI *op. cit.* tav. 96, 33; 97, 16; 116, 13; e HEAD p. 61-85. Si può vedere per la spedizione di Alessandro il Molosso in Italia e per le

Digitized by Google

figura dell'Ercole non è esclusiva soltanto per Sidion, poiché anche in un nummo di Mateola compare l'immagine dell'eroe, per cui non si può escludere una relazione stretta tra tali monete. È chiaro che la diffusione del culto di Giove Olimpio testimoniato da un gran numero di nummi dell'Apulia e del Bruzio va congiunta con la dimora del principe Epirota in Italia.[1] Probabilmente con questa federazione di luoghi Apuli e Bruzi nell'interesse di Alessandro si riconnettono anche tipi di monete di Ruvo nelle quali apparisce traccia di alleanza tra la cittá e quella dei Sidini.[2] Della quale alleanza è più che un sentore nella tradizione storica, che insiste su patti di amicizia conchiusi tra il principe e le popolazioni Apule.[3] È molto probabile che l'unione di queste cittá Italiote sotto la direzione del Molosso abbia avuto per conseguenza la rottura delle sue relazioni con Taranto, che l'aveva chiamato a consolidare la sua potenza e la sua egemonia sulla penisola Sallentina e sulle popolazioni Apule a cui miravano i Lucani.[4] Fu dunque allora

sue aspirazioni ad un grande Stato greco che comprendesse tutte le popolazioni della Lucania del Bruzzio e dell'Apulia la memoria del PAIS in *Ricerche St. e Geogr. sull'It. Ant.* p. 135 sgg.

[1] Per Hipponium si veda GARRUCCI t. 116, 13.

[2] GARRUCCI p. 119 e 115. Ritengo che l'accezione dell'JATTA (*op. cit.* p. 34) sia ragionevole. Le monete rubastine, che si riferiscono al tempo della dimora di Alessandro in Italia e che portano le sigle ΣΙ e ΡΓ, potrebbero pertanto significare l'alleanza che strinse questi due popoli durante l'impresa dell'Epirota, quantunque il Garrucci (p. 115) propenda ad ammettere la sillaba come iniziale di un nome magistratizio, analogamente a ΔΑ che è il principio del nome di persona ΔΑΙΟΓ. Ad ogni modo non è mai, come pare all'AVELLINO citato dal GARRUCCI, una sigla di una cittá Σιλούτον ma di Σίδιον.

[3] TROGO in IUST. XII 2, 7 e 12 (*gessit et cum Bruttiis Lucanisque bellum multasque urbes cepit; cum Metapontinis et Poedioulis et Romanis foedus amicitiamque fecit*).

[4] ERODOTO lascia capire la mira dei Tarantini di occupare le terre dei Messapi e degli Iapigi. Il racconto (VII 170) che egli fa di lotte tra queste

Digitized by Google

un distacco che i Sidini fecero da Taranto, a cui erano essi legati con vincoli di alleanza e d'interesse, chiariti e confermati dai documenti numismatici del periodo anteriore all'infelice tentativo dell'Epirota. Del resto tutto indica che il luogo, abitato dai rozzi Peucezi, sentí il beneficio della civiltá greco-tarantina, e fu come la sentinella avanzata nella espansione che la potente cittá dorica del Sud d'Italia faceva nella valle del Bradano[1] durante la reggenza di Archita. Non v'ha dubbio che questi vincoli d'amicizia tra i Peucezi e i Tarantini ebbero per naturale conseguenza la colonia, tra le altre, di Sidion, come, d'altra parte, furono il risultato appunto di parte del grande programma che i Tarantini avevano fissato per il loro imperialismo italico.[2]

È probabile che la colonia tarantina giá prima della venuta di Alessandro si staccasse dalla madre patria, perché costretta soprattutto dalle condizioni politiche per le quali Taranto fu spinta a pensare ai casi suoi. Era il momento in cui i Messapi congiunti ai Lucani ridussero la metropoli dorica a rivolgersi per aiuti ai propri connazionali. Gli avvenimenti che seguirono come contraccolpo alla congiunzione delle armi di Archidamo di Sparta con quelle di Taranto non furono certo secondo i desideri di quest'ultima. L'unione dei Messapi con i Lucani pose una barriera definitiva all'avanzarsi dell'egemonia tarantina, e la morte di

popolazioni e costoro dichiara, anche se non apertamente, la pertinace colonizzazione tarantina in tutta la regione sud-est dell'Italia. A queste lotte allude certamente CLEARCO di Soli (p. 9 in *FHG.* II p. 306).

[1] Per la documentazione monetale si veda HEAD p. 59 sgg.

[2] Il luogo di PAUSANIA (X 13, 10) è di per sé chiaro a concludere che si tratta delle guerre che i Tarantini fecero a danno dei Peucezi, per imporre loro condizioni di soggezione; nonostante l'aiuto che gli Iapigi diedero sempre ai loro vicini (Βασιλεὺς Ἰαπύγων Ὦπις ἦκων τοῖς Πευκετίοις σύμμαχος).

Digitized by Google

Archidamo, durante l'impresa, segna la vanità del tentativo, ripetutamente poi rinnovato da Alessandro e da Pirro.[1] Non è pertanto irragionevole supporre, e la scarsezza delle monete tarantine negli scavi nel luogo dell'antica Sidion conferma la ipotesi,[2] che la colonia tarantina abbia dovuto subire l'influenza delle popolazioni indigene collegate ad impedire l'espansione della potenza di Taranto. Non che in questa condotta di Sidion verso la madre patria si debba vedere una defezione dai suoi connazionali. È invece verisimile, secondo l'opinione di qualcuno,[3] che l'elemento indigeno non abbia mai trascurato di riprendere la rivincita sui Dori di Taranto che avevano su quello fatto pesare la loro egemonia. Cosicchè la posizione di Sidion, alla venuta di Alessandro, fu favorevole alla causa dei connazionali; perché se anche non aggiogata al carro di Taranto, tuttavia veniva a trovarsi nelle file del principe greco, che mirava a consolidare la preponderanza greca sulle popolazioni italiche dell'Italia meridionale.[4]

Ma l'unione degli elementi indigeni prevalse contro gli

[1] DIODORO (XVI 88, 3) c' informa dell'aiuto di Archidamo e dell' esito disgraziato del suo intervento. Sull' argomento conservano notizie tanto PLINIO (*n. h.* III 98) quanto PLUTARCO (*Agid.* 3).

[2] Cfr. HEAD p. 60.

[3] FRANCESCO TUDISCO, *Il popolo Apulo prima di allearsi col popolo Romano* Bari 1913 p. 383. Non ci sembra molto interessante di fermarci sull'altra opinione del TUDISCO, relativa alla ubicazione di Silvium. Egli è tratto a collocare la città nella località denominata Selva non lontana da Gravina ma fuori della Via Appia, soltanto indotto da assonanza, per quanto tenga conto dei dati straboniani, né d'altra parte egli sapendo dei ruderi di Botromagno. Le varie iscrizioni bilingui e trilingui trovate nella regione Iapigia confermano la persistenza dei caratteri nazionali indigeni che non furono mai soffocati dal sopravvenire della civiltà greca (cfr. l' articolo citato del RIBEZZO).

[4] La cronaca di Ossirinco alla ol. 111, 3 = 334/3, con imprecisione cronologica, riporta: τότε καὶ Ἀλέξανδρος ὁ Μολόσσος εἰς Ἰταλίαν διέβη βοηθήσων τοῖς ἐκεῖ Ἕλλησι. Cfr. DE SANCTIS *St. d. Rom.* II p. 292 sgg.

Digitized by Google

assalti di Taranto, la quale poi non aveva mancato, per accorto criterio di politica, di servirsi dei Sanniti, in unione agli Iapigi e ai Peucezi, per arginare l'irruzione dei Romani.[1] Ed infatti nel 306 Sidion era in potere dei Sanniti, contro i quali i Romani dovettero per più di un giorno lottare prima di espugnare la fortezza del luogo, a loro necessaria per congiungere le varie forze operanti nella regione. L'importanza del luogo si rileva specialmente dal risultato immediato dopo la presa della cittá. Poiché il guasto dato dai Romani al territorio sannitico fu una misura di questi per assicurarsi l'egemonia, la quale, in conclusione, non poteva conseguirsi senza il possesso della forte Sidion.[2]

Durante la guerra pirrica la cittá sidina, ormai romanizzata, fu di rifugio all'esercito romano inseguito dai soldati del duce Epirota. La notizia che informa come i Romani dopo l'infelice giornata di Eraclea incalzati dagli Epiroti ed ostacolati da un fiume, per la circostanza favorevole di un elefante che scompigliò le schiere inseguitrici di Pirro, essendosi contro esse rivolto, ebbero cosí modo di guadare il fiume e mettersi al sicuro riparo di una cittá della Apulia, è indeterminata, perché solo aggiunge come dato storico il determina-

[1] Pais nelle *Ricerche* cit. p. 372

[2] Diod. XX 80, 3 sgg. Lo storico non si accorge, come altra volta, che la sua fonte, da lui compendiata, esponeva le misure prese dai Romani per render stabile la soggezione di quelle popolazioni; cioè la spogliazione della metropoli (αἰχμάλωτα σώματα πλείω τῶν πεντακισχιλίων ἔλαβον καὶ τῶν ἄλλων λαφύρων ἱκανόν τι πλῆθος) e la distruzione del territorio (πολλὰ γὰρ ἔτη τῆς Ῥώμης πρὸς τοῦτο τὸ ἔθνος διαπολεμούσης ὑπὲρ τῆς ἡγεμονίας ἤλπιζον τῶν ἐπὶ τῆς χώρας κτήσεων στερήσαντες τοὺς πολεμίους ἀναγκάσειν εἶξαι τοῖς ὑπερέχουσιν). Livio non fa parola di Silvium né della presa di Silvium, quantunque importante e decisiva per la conquista del Sannio. Forse ciò è dovuto al solito metodo dello storico di non dare peso a quei fatti che, pur notati nelle fonti che adoprava, non aggiungevano, secondo il suo modo di vedere, curiositá al lettore.

Digitized by Google

tivo di Apula.[1] Veramente tutto il passo non lascia da solo stabilire e identificare i luoghi accennati. Ma l'essere indicato un solo fiume come ostacolo al passaggio nella Apulia per l'esercito che da Eraclea fuggiva verso nord-est, è sufficiente per ammettere ragionevolmente che la notizia, molto concisa, si riferisca solo all'ultima parte dell'inseguimento quando la fortuna venne in aiuto ai Romani[2] nel momento che la barriera della corrente fluviale impediva a loro di continuare la corsa, né d'altra parte dava modo, per il sopraffare dei nemici, di riuscire a traversarla. Il fiume non poteva essere che il Bradano, oltre il quale l'esercito Romano veniva a trovarsi sulla via che portava a Venosa, che già dal 291 era colonia latina. Pertanto la sosta, alla quale allude lo storico, fu fatta con molta probabilità in Sidion. Ed è verisimile che per la valle del Bradano passasse pure l'esercito di Alessandro il Molosso, quando intese di combattere divise le forze collegate dei Sanniti coi Lucani e i Bruzî.[3] Livio ci narra questa battaglia di Posidonia, ma le sue parole hanno dato luogo ad interpretazioni, da ricavarne che l'assalto dell'Epirota venisse da Posidonia, per la via di mare.[4]

[1] ZONAR. VIII 3 P I 372: καὶ οὕτως οἱ Ῥωμαῖοι διαβεβηκότες τὸν ποταμὸν εἰς Ἀπουλίδα πόλιν τινὰ ἀπεσώθησαν.

[2] ZONAR. *l. c.* οὐδ' ἂν ὑπελείφθη τις, εἰ μὴ ἐλέφας τρωθεὶς αὐτός τε ἐσφάδαζεν ἐκ τοῦ τραύματος καὶ οἱ ἄλλοι πρὸς τὰς ἐκείνου βοὰς ἐταράσσοντο. διὰ τοῦτο γὰρ ὁ Πύρρος ἐπέσχε τὴν δίωξιν ecc.

[3] Sull'unione delle armi Lucane-Bruzie si veda LIVIO VIII 24, 4 (*cum saepe Bruttias Lucanasque legiones fudisset*); IUST. XII 3,13 (*sed Bruttii Lucanique cum auxilia a finitimis contraxissent acrius bellum repetivere*).

[4] VIII 17,9: *ceterum Samnites bellum Alexandri in Lucanos traxit, qui duo populi adversus regem* escensionem a Paesto facientem *signis collatis pugnaverunt. eo certamine superior Alexander, incertum qua fide culturus si perinde cetera processissent, pacem cum Romanis fecit.* Il WEISSENBORN commenta: *der König ist um Italien herumsegelt und hat die Städte an der Westküste erobert.* Sulla questione dell'itinerario tenuto da Alessandro per attaccare le armi collegate dei Lucani coi Bruzi v. BELOCH *Gr. Gesch.* II

Digitized by Google

Però per le ragioni che favoriscono il piano politico di Alessandro sembra più conseguente che egli mirasse a colpire gli alleati nel cuore della regione per impedire che l'unione dei due popoli ostacolasse la lega a lui favorevole degli Italioti, che aveva voluto trasferita da Eraclea a Turi.

Le vicende di Silvium durante la romanizzazione sono dichiarate a seconda della sorte dell'Apulia. Le monete assicurano che dal principio del terzo secolo[1] la città era romana e la tradizione letteraria conferma alla sua volta il documento numismatico. E se per qualche periodo non è lecito trovare nel territorio sidino la presenza del monumento monetale, questo probabilmente si deve addebitare alle condizioni speciali nelle quali, in quel dato momento, è venuta a trovarsi Silvium; senza però che vi fosse una vera e propria discontinuità nella nuova posizione politica del luogo. Durante la ribellione degli italici nell'89 a. C., l'antica colonia tarantina ebbe a subire la sorte delle altre città della sua regione. La resa di Venosa e di Ascoli portò alla conseguenza che le popolazioni dei Pedicli non si unissero ai rivoltosi,[2] cosicché Silvium rimase fedele a Roma. E la presenza di monete della lega italica non possono avere altro significato da quello che ha, nel periodo immediatamente successivo alla vittoria de' Romani sui Sanniti, nel primo decennio del secolo terzo, la mescolanza delle monete romane

pag. 594 e PAIS *Ric.* p. 143. La espressione *facere escensionem* ha lo stesso valore che ha *escendere* in altri luoghi liviani, cioè di penetrare, salendo, (ἀναβαίνειν) nell'interno; ciò che faceva Alessandro, il quale risalendo il Cilento percorreva la valle del Tanagro al fine di arrivare nel Bruzio.

[1] Cfr. BABELON *Monnais d. la Rep. Rom.* p. XIV.

[2] APP. *b. c.* I 227-230. L'informazione dello storico non permette di ricavare nessuna azione compiuta dai Pedicli tanto in favore quanto contraria ai Romani (καὶ ὁ Κοσκώνιος τὴν Λαρινατῶν καὶ Οὐενουσίων καὶ Ἀσκλαίων γῆν ἐπιῤῥαμὼν ἐς Ποιδίκλους ἐσέβαλε καὶ δυσὶν ἡμέραις τὸ ἔθνος παρέλαβε).

Digitized by Google

e tarantine. Le relazioni dei Peucezi coi Tarantini nel 300 non furono troncate dal sopraggiungere dei Romani; come nell'89, dalla forza delle circostanze, i Peucezi e con essi i Sidini non poterono essere estranei al movimento di libertá iniziato dai loro antichi connazionali.

Quando Silvium sia scomparsa dalla Storia non è agevole determinare perché la Storia stessa, come si è veduto, è molto velata. Tutto può essere rischiarato da uno studio sistematico dei ricordi e degli avanzi monumentali che gli scavi di Botromagno ci possono offrire. I vari monumenti archeologici, anche se frammentari e scarsi, quando sieno raccolti e debitamente illustrati, possono illuminare piú punti della vita civile e politica di Silvium, che fino ad oggi, per il silenzio delle fonti letterarie, sono oscuri. La fine della cittá è collegata col sorgere di Gravina; e le tracce sull'area di incendio e di devastazione[1] indicano naturalmente la violenza alla quale soggiacque l'antica Sidion. La menzione che noi leggiamo di questa negli Itinerari è l'estremo guizzo della sua vita.

Appendice. — Le notizie letterarie sull'etnografia di Nola non risultano concordi, perché le une la dicono greco-calcidica,[2] le altre etrusca e ausonia;[3] tanto che anche recentemente è stata dichiarata l'insufficienza a risolvere la questione.[4]

[1] Secondo notizie che gentilmente ho avuto dallo studioso locale, giá ricordato, il sig. CALDERONI-MARTINI, il quale ha pronta per la stampa un'interessante memoria sulla topografia del territorio Sidino.

[2] TROG. in IUST. XX 1,13 e SIL. IT. XII 161.

[3] CATO in VELL. I 7, 2-3 ed HECAT. in *FHG.* I p. 2 fr. 28.

[4] In particolare si veda GIUSEPPE RAIOLA *L'origine di Nola* Nola 1912. Uno studioso del secolo decimo sesto, AMBROGIO LEONE, giá aveva riconosciuto l'impossibilitá di venire ad un risultato probabile (*De Nola* Venetiis 1514, I 3).

Digitized by Google

Anche per Nola, come per Silvium, ci aiuta a strigare la matassa la suppellettile archeologica, che in maggiore copia e di migliore pregio possediamo della sidina. La grande massa di vasi greci, tanto corinzi quanto attici e italioti che le tombe nolane ci hanno conservato dal secolo sesto al terzo e i varî esemplari numismatici, con la leggenda di ΝΩΛΑΙΩΝ -- ΝΩΛΑΙΟΣ e con quella di ΗΥΡΙΕΤΕΣ — ΥΡΙΑΝΟΣ — ΥΡΙΝΑ, assicurano, soprattutto questi ultimi, la presenza, almeno, di una colonia greca a Nola.[1] Che questi coloni di Nola derivassero dalla antica colonia cumana-calcidica di Napoli è precisamente indicato dal tipo identico monetale delle due città, cioè, a diritto, una testa di Atena con elmo laureato, volta a destra, e, a rovescio, un bue con faccia umana volto pure a destra con la relativa leggenda.[2] Il nome della colonia greca era ΥΡΙΑ, da cui il demotico ΥΡΙΕΤΕΣ e ΥΡΙΑΝΟΣ. Quando si siano trasferiti i coloni greci da Napoli nella nuova sede non si può con certezza arguire, ma non è difficile supporre che la colonia di Hyria sia stata una naturale conseguenza della vittoria dei Greci di Cuma collegati con Ierone sugli Etruschi.[3] La presenza di manufatti greci in Nola anteriori alla seconda metà del secolo quinto ed anche agli ultimi decenni del secolo sesto non ci può dire altro che tra quel luogo e il mondo greco si erano avviate, fin da allora, relazioni commerciali ed industriali, testimoniate dai vasi corinzi e dai vasi attici,[4] quando gli Etruschi erano passati in Campania ed avevano

[1] Gerhard in *Annali d. Inst. Corr. Arch.* 1831 p. 14 sgg.; Garrucci *op. cit.* p. 91 sgg. e tav. 88 e 89.

[2] Garrucci tav. 84 e 89.

[3] Diod. XI 51; Pind. *Pyth.* I 140. Sull'importanza commerciale di Cuma, su cui gli Etruschi avevano appuntato le loro mire, si veda De Sanctis *St. d. Rom.* I p. 457.

[4] Cfr. il citato *Rapporto Volcente* del Gerhard negli *Ann. d. Inst. Corr. Arch.*

Digitized by Google

occupato Capua, estendendo l'occupazione a tutta la zona fra Capua e Nola.[1] Le condizioni politiche degli Etruschi nolani devono essere cominciate a decadere fin da quando i Cumani respinsero vittoriosamente l'attacco che i Tirreni insieme con popolazioni italiche fecero sui Greci della Campania.[2] Così si spiega come dagli ultimi anni del secolo sesto alla fine della prima metà del quinto ogni rapporto commerciale tra gli Etruschi di Nola e i Greci venga a mancare. Da parte di questi si cercò in ogni modo di troncare qualunque relazione coi Nolani, evitando ogni contatto. Pertanto è agevole vedere che isolati gli Etruschi-Campani, perché chiusi, per terra, tra i Latini, e, per mare, dalle colonie greche, precipitarono nello sfacelo prima commerciale e poi politico. La ripresa delle relazioni commerciali in Nola è segnata dal ricomparire dei manufatti greci dopo la metà del quinto secolo;[3] che d'altra parte confermano quanto le monete testimoniano, cioè la residenza di una comunità di greci nell'antica sede etrusca con nome etnico proprio, esteso a tutta la città nella quale essi vennero ad abitare.

Così la tradizione letteraria non è affatto contraddittoria; poiché Etruschi e Greci furono in Nola, e gli uni e gli altri diedero impulso alla vita politica del luogo. Né però è priva di fondamento anche la terza informazione, secondo la quale Nola è una città degli Ausoni. La coesistenza di monete, con la leggenda nelle une di Nola e nelle altre di Hyria, coi medesimi caratteri, col medesimo stile, della medesima fabbrica, ha fatto naturalmente pensare alla loro deriva-

[1] Pol. II 17,1. Per monumenti etruschi in Nola si veda, in particolare, Mommsen *Unteritalischen Dialekte* (Lipsia 1850) e Lattes *Le iscrizioni paleolatine* in *Mem. Ist. Lomb.* XIX p. 96 sgg.

[2] Dionys. VII 3-4.

[3] Cfr. la citata memoria del Raiola p. 13 sgg.

Digitized by Google

zione dalla medesima località.[1] In tal caso è ovvio ammettere che al nome greco sia seguito quello italico di Nola, cioè la città nuova,[2] quando l'elemento sannitico prevalse sulle popolazioni greche. Che si tratti di un solo ed unico luogo, dove la successione di un nuovo comune abbia preso il sopravvento sul vecchio, è indicato dalla dichiarazione epigrafica, la quale distingue una Nola vecchia da una Nola recente.[3] Anche il fatto che i varî monumenti di ceramica, appartenenti a piú secoli, dal piú remoto al piú recente, si trovano tutti in tombe disposte intorno alla odierna cittá, assicura che l'area della cittá tanto antica quanto nuova fu sempre la medesima, almeno a cominciare dal settimo secolo.[4]

L'appellativo osco di Nola si sostituí all'antico greco di Hyria. Ma non crediamo che la dichiarazione, attribuita a Ecateo, di cittá Ausonia si debba riferire alla occupazione sannitica. Il trovarsi, secondo tale testimonianza, menzionata Nola giá ai primi del quinto secolo non è ragione per infirmare quanto giá abbiamo veduto, cioè che il nome di Nola non è anteriore a quello di Hyria.[5] Ci troviamo con questa testimonianza per Nola nelle medesime condizioni che per altre relative a fatti e circostanze di fatti posteriori al tempo del geografo,[6] come, tra gli altri, il nome di

[1] FRIEDLAENDER *Die Osk. Münzen* s. v. Uria e MOMMSEN *Hist. de la Mona. rom.* s. v. Uria.

[2] FRIEDLAENDER nell'*art. cit.* e MOMMSEN *Unterit. Dial.* p. 283.

[3] *CIL.* X 1273. Uguali condizioni si avverarono in altre cittá, nelle quali lo sviluppo demografico ed etnografico produsse naturalmente una netta distinzione fra il centro vecchio e nuovo. Cosí in Etruria ad Arezzo, a Chiusi; e nella Campania a Pompei (La mia *Topografia ster. dell'Etr.* I p. 285).

[4] Sul luogo del ritrovamento dei vasi antichi Nolani si può vedere l'opera manoscritta di PIETRO VIVENZIO (*Sépulcres de Nole* ecc. Napoli 1806) che si conserva nella Biblioteca Naz. di Napoli, citata dal RAIOLA. Cfr. anche il NISSEN *op. cit.* II p. 756.

[5] A questo proposito cfr. BELOCH *Campanien* ad l.

[6] NISSEN *op. cit.* II p. 757 n. 4; 698 n. 1 e I p. 7 n. 1.

Digitized by Google

Capua giá esistente ai tempi di Ecateo. Nondimeno l'etnico dello pseudo-Ecateo è dovuto a qualche erudito assai posteriore all'etá a cui questi si riferiva con la sua Nota etnografica. E forse si è voluto ritrarre un primitivo stato della regione, nella quale poi venne ad occupare un posto notevole Nola. Con questo non potremmo vedere un errore nel determinativo dello pseudo-Ecateo; ed a ciò non sarebbe difficile trovare un punto d'appoggio nella presenza, tra le altre reliquie archeologiche, di vasi nericci rozzamente lavorati, propri della civiltá osca;[1] se però non si vuole riconoscere nel determinativo di Ausonia la condizione di Osca, in cui la cittá si venne a trovare dopo che gli Osci-Sanniti ebbero vittoriosamente trionfato sui greci della Campania, e perticolarmente di Nola.

Cosí nell'antico centro greco prevalse l'elemento italico primitivo, il quale legò alla cittá il nome nazionale, lasciando cadere in dimenticanza l'appellativo greco, che faceva fede del nucleo di coloni che anteriormente avevano posto la residenza a Nola.[2] Parimente accadde a Sidion, centro greco, in cui la successiva invasione sannitica rinnovò l'antica cittá, trasformando il nome del luogo in Silvium. Sia che questi due nomi abbiano tra loro una stretta connessione, come è parso ad alcuni che abbiano silva e ὕδα-ὕδη, sia che invece l'uno corrisponda all'altro, in quanto Silvium è una modificazione fonetica di Sidion, è però certo che l'appellativo ritrae determinate condizioni della campagna,[3] delle quali quel nome è fedele specchio.

[1] Se ne parla nell'opera ricordata del VIVENZIO.

[2] L'influenza sannitica sulla grecitá di Hyria si può rilevare dalla leggenda delle monete, la quale risente evidentemente del barbaro invasore; cfr. GARRUCCI p. 93 e tav. 89 2-8.

[3] Su ciò PAIS *St. Crit. di Roma* IV p. 46 n. 1. Alla natura agreste della regione accenna pure OVIDIO con la sua metamorfosi del libro XIV 512-526.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 7.

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI

Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

VII.

Dott. UGO PARDI

RICERCHE

SULL' ANAFILASSI

Digitized by Google

Digitized by Google

Nel 1914 io intrapresi una serie di ricerche sulla « anafilassi » che iniziate a Berlino nel Laboratorio diretto da Friedberger, furono poi continuate nell' Istituto di Patologia Generale di Pisa sia nell'anno che precedette la nostra guerra sia dopo la guerra fino ad oggi.

Alcune di esse furono da me comunicate alla « Società Toscana di Scienze Naturali » (Sedute 2 Maggio 1915 e 16 Gennaio 1916), altre formano argomento della presente nota e vertono sopra due importanti questioni, che per quanto apparentemente non abbiano stretta attinenza tra di loro si riferiscono pur sempre alla più intima comprensione di quel complicato ed interessante fenomeno che è l'« anafilassi ».

Più precisamente io mi sono occupato di studiare da una parte il problema della specificità o meno della antianafilassi, dall'altra quello riflettente l'importanza del sistema nervoso nella crisi anafilattica e l'azione della iniezione subdurale di anafilotossina, di cui appunto trattano i due capitoli seguenti.

Digitized by Google

Digitized by Google

Capitolo I.

Intorno alla specificità dell'antianafilassi.

Lo stato antianafilattico, che si può terminare in un animale sensibilizzato mediante la iniezione di una dose subletale di antigene, è stato spiegato da Friedberger, ammettendo una neutralizzazione dell'anticorpo anafilattico da parte dell'antigene.

Secondo questo concetto quindi l'antianafilassi deve essere evidentemente considerato come un processo strettamente specifico, cosicchè in un animale sensibilizzato con due antigeni differenti, l'iniezione di uno di essi in dose subletale dovrebbe conferire uno stato di difesa solo contro questo e non contro l'altro antigene della sensibilizzazione.

Tuttavia, è appunto in base ai risultati di un simile ordine di ricerche che, secondo Bessau, si deve escludere la specificità dell'antianafilassi. Preparando infatti delle serie di cavie contemporaneamente con siero di bue e di cavallo e antianafilattizzandole contro uno dei due antigeni, Bessau poté osservare che gli animali erano difesi anche contro l'altro siero. E poichè egli, ed indipendentemente da lui,

Digitized by Google

Sachs e Ritz avevano dimostrato come nel periodo antianafilattico si possa notare una certa resistenza degli animali anche contro una successiva iniezione di anafilotossina tifica, così Bessau considera l'antianafilassi come un fenomeno consistente in uno speciale stato di reazione dell'organismo, prodotto dal veleno anafilattico e che si manifesta con una diminuita sensibilità verso il veleno stesso.

Quantunque le esperienze di Bessau fossero successivamente confermate da Bauer, pure Friedberger, sulla base di ricerche compiute in collaborazione con Szymanowki, Kumagai, Odaira e Lurà non riconosce loro alcun valore dimostrativo, perchè mentre da una parte negli esperimenti su animali doppiamente sensibilizzati mancava una esatta valutazione del grado di difesa antianafilattica sia contro il siero verso il quale l'animale era stato dissensibilizzato, sia contro l'altro antigene, d'altra parte nelle ricerche sull'anafilotossina mancava pure ogni determinazione della maggiore quantità di anafilotossina tifica, che poteva essere sopportata da un animale in stato antianafilattico in confronto di un animale normale.

Perchè dunque i risultati degli esperimenti di Bessau potessero considerarsi come dimostrativi, Friedberger richiedeva che gli animali doppiamente sensibilizzati venissero provati nella loro sensibilità contro i due antigeni, che per ambedue gli antigeni venisse determinata la semplice dose letale e che la difesa antianafilattica verso il siero omologo (specifica) e verso quello eterologo (aspecifica) venisse espressa in unità di dosi letali.

Determinando infatti queste dosi letali Szymanowskj potè stabilire che nelle cavie, preparate con due sieri ed in seguito antianafilatizzate verso un solo antigene, non subentrava affatto uno stato antianafilattico anche verso l'altro

Digitized by Google

antigeno, ma solo si rendeva manifesta una lieve resistenza contro scarsissime dosi letali di esso.

Lo stesso fatto, ma con risultati ancora più evidenti, osservarono Kumagai e Odaira, studiando la questione in animali sottoposti ad una duplice sensibilizzazione passiva, nei quali fu potuto constatare, che mentre la difesa contro l'antigene omologo si manifestava anche di fronte a 200 dosi letali, quella contro il siero eterologo si rivelava solo contro 1-1 $^1/_2$ dosi letali.

Per ciò che concerne infine la difesa contro l'anafilotossina in animali in istato antianafilattico contro un antigene qualsiasi, le ricerche di Lurà dimostrano che essa è così piccola da non essere affatto rilevabile anche contro 1 $^1/_2$ dose letale di anafilotossina.

Da tutte queste ricerche emerge, secondo Friedberger le reale esistenza dell'antianafilassi specifica, la quale può venire solo in parte nascosta da un certo grado di resistenza generale non specifica, quale si verifica, ad esempio, dopo iniezioni di peptone, di sieri tossici e di altre sostanze analogamente tossiche.

In una successiva pubblicazione, alla quale hanno col laborato Opitz e Preusse, Bessau ha riconosciuto pienamente giustificate le richieste di Friedberger, cui sopra abbiamo accennato, ma alla sua volta afferma che, mentre da una parte i risultati di Kumagai e Odaira favorevoli al concetto della specificità della antianafilassi non hanno una portata generale - rappresentando l'antianafilassi in animali passivamente sensibilizzati un problema speciale che richiede un interesse a sè - d'altra parte le ricerche di Szymanowskj non dimostrano quanto dovrebbero comprovare, giacchè in esse si sarebbe dovuto determinare non solo il grado della difesa non specifica, come è stato fatto da Szymanowskj,

Digitized by Google

ma anche quello dell'antianafilassi specifica e comparare l'uno all'altro: solo nel caso che da questa comparazione fossero risultate delle grandi differenze si sarebbe stati autorizzati a distinguere tra antianafilassi specifica e resistenza non specifica.

Per colmare appunto questa lacuna Bessau, Opitz e Preusse hanno creduto opportuno riprendere lo studio della questione in cavie attivamente sensibilizzate con siero di bue e di cavallo, e conforme ai postulati di Friedberger hanno in essi determinato: 1.° la dose mortale alla rieniezione di ciascuno dei due sieri usati come antigeni; 2.° il grado di difesa, contro il siero omologo; 3.° il grado di difesa contro il siero eterologo.

Non essendo però riusciti a trovare, malgrado questo ordinamento, delle sensibili differenze tra l'una e l'altra difesa gli autori non hanno ritenuto di poter fare alcuna distinzione tra antianafilassi specifica e quella non specifica o meglio tra antianafilassi specifica e resistenza non specifica.

In appoggio al concetto della aspecificità dell'antianafilassi, gli autori riferiscono nella stessa pubblicazione anche su di un altro ordine di esperimenti sul coniglio, nel quale, dopo una duplice sensibilizzazione, hanno studiato il modo di comportarsi delle reazioni locali che si vengono manifestando nei punti di iniezione sottocutanea dei due antigeni, in seguito alla iniezione antianafilattizzante di un solo antigeno. Siccome neppure qui ebbero a notare alcuna differenza di comportamento delle reazioni locali omologhe ed eterologhe, così gli autori in base al loro duplice ordine di ricerche, insistono nel considerare l'antianafilassi come un processo specifico, ciò che è del tutto inconciliabile col concetto di Friedberger della neutralizzazione di anticorpi.

Stabilito in tal modo il punto fondamentale della que-

Digitized by Google

stione, gli autori in una successiva pubblicazione hanno rivolto il loro studio ad indagare la genesi dell'antianafilassi, e poichè il fatto della scomparsa di precipitine, dopo una reiniezione di siero, osservata da Scott e da Joachimoglu, poteva rappresentare un punto di appoggio essenziale per l'ipotesi di Friedberger, mentre d'altra parte poco armonizzava col concetto della aspecificità dell'antianafilassi, così gli autori — dopo aver controllato e confermato i risultati di Scott e di Joachimoglu — si sono dati a studiare i rapporti di tale scomparsa di precipitine con l'antianafilassi e ad esaminare se si trattava di una scomparsa determinata o meno da un assordimento specifico di anticorpi. In base a queste indagini Bessau e i suoi collaboratori concludono in primo luogo che con la scomparsa della precipitine da un siero procede parallelamente una dimizione della sua proprietà di anafilattizzare passivamente, ed in secondo luogo che la scomparsa delle precipitine è nella sua essenza un fenomeno non specifico, in quantochè negli animali doppiamente sensibilizzati vengono a diminuire, mediante la reiniezione di uno degli antigeni, non solo le precipitine omologhe, ma anche quelle eterologhe, sebbene in grado minore.

Secondo Bessau, il fatto che la scomparsa delle precipitine non è nella sua essenza specifica, sta nella migliore concordanza con la aspecificità dell'antianafilassi. Mentre però prima di queste ricerche Bessau interpretava l'antiafilassi unicamente come espressione di una diminuzione della sensibilità contro il veleno anafilattico, ora invece egli conclude che l'antianafilassi non è un fenomeno unico e che a base di esso stanno due processi differenti, ambedue non specifici: la scomparsa delle precipitine e lo abbassamento della sensibilità contro il veleno anafilattico. Perciò egli

Digitized by Google

distingue una « Fällungsantianaphylaxie » e una « Giftantianaphylaxie «.

Come si vede è qui in parte riprodotto, come Bessau stesso rileva il concetto di Sachs e Ritz, i quali da tempo hanno distinto tra antianafilassi da suturazione di anticorpi e antianafilassi prodotta dall' azione del veleno anafilattico, con questa differenza però, che mentre Sachs e Ritz distinguono in tal modo una antianafilassi specifica da una non specifica, Bessau considera in vece tanto la « Fällungsantianaphylaxie » quanto la « Giftantianaphylaxie » come due processi non specifici.

La divergenza tra le due concezioni è dunque profonda e la questione assurge in tal modo ad una non lieve importanza, se si considera che la conoscenza dell'antianafilassi può permettere di addentrare un po' meglio lo sguardo sull' anafilassi e sul suo meccanismo. La questione quindi meritava di essere nuovamente studiata, tanto più che non tutti i vari procedimenti sperimentali di Bessau e dei suoi collaboratori sono così dimostrativi come gli autori ritengono. Tale è il caso, ad esempio, tanto dagli esperimenti sulle reazioni locali anafilattiche in conigli doppiamente sensibilizzati e antianafilattizzati contro un solo degli antigeni, nei quali assistiamo troppo spesso a comportamenti diametralmente opposti tra loro, quanto delle ricerche sulle precipitine, le quali essendo basate su differenze spesso minime e anche qui non sempre concordi, possono facilmente indurre ad erronei apprezzamenti. Il gruppo di esperimenti più dimostrativo resta quindi quello sulle cavie doppiamente sensibilizzate, e reiniettate contro un solo antigeno, nelle quali veramente la differenza fra grado di difesa specifica e non specifica è così piccolo, da non giustificare affatto la distinzione proposta da Friedberger tra antianafilassi specifica e resistenza non specifica.

Digitized by Google

Anche a proposito di esse però sorge il dubbio che le lievissime differenze suaccennate, siano imputabili al fatto che gli animali non fossero sufficientemente antianafilattizzanti.

È noto infatti che il grado dell' antianafilassi dipende dalla quantità di antigeno che viene iniettata: se si inietta solo poco antigene, allora rimane sempre libera una certa quantità di anticorpi, che sarà sufficiente a provocare una crisi anafilattica in una ulteriore iniezione di antigene. Ora consultando i portocolli sperimentali di Bessau, si constata che la quantità di siero adoperata per l' iniezione antianafilattizzante non supera mai i c. c. 0,03, mentre la difesa specifica non esiste più di fronte a 10 dosi mortali di siero omologo.

Ciò premesso, era naturale che si dovesse ritentare lo esperimento allo scopo di vedere se provocando uno stato antianafilattico verso uno degli antigeni molto più elevato di quello presentato dagli animali di esperimento di Bessau, si elevava contemporaneamente anche la differenza tra antianafilassi specifica e quella non specifica. A questo scopo ho provocato lo stato antianafilattico degli animali da esperimento mediante iniezione endoperitoneale, anzichè endovenosa, praticata da Bessau, la qual cosa permette, come è noto, di introdurre quantità assai maggiori di antigene, senza correre il rischio di provocare delle crisi anafilattiche mortali o per lo meno gravi.

Ogni serie di ricerche fu eseguita su cavie di circa gr. 250-300, ciascuna delle quali venne preparata contemporaneamente con c. c. 0,02 di siero di cavallo e con c. c. 0,02 di siero di montone (in una serie il siero di montone fu sostituito da albumina d' uovo), inattivati per mezz' ora a 56°. Ambedue le iniezioni sensibilizzanti furono praticate sottocute, l' una sulla regione toracica destra, l' altra su quella sinistra.

Digitized by Google

Dopo un periodo di incubazione di 13-15 giorni, un certo numero di cavie veniva in ogni serie sottoposto alla iniezione vaccinante endoperitoneale di 0,5 1,0 c. c. di un solo antigene, mentre le rimanenti venivano riservate per la determinazione della dose letale di ambedue gli antigeni, la quale fu sempre stabilita poche ore prima della iniezione endovenosa di prova. Questa fu praticata negli animali resi antianafilattici ad intervalli vari dall' iniezione vaccinante, dividendo gli animali stessi in due distinti gruppi, il primo dei quali venne trattato con l' antigene omologo a quello usato per l' antianafilassi ed il secondo gruppo con siero eterologo.

Premessi questi cenni esplicativi della tecnica, i risultati sono rappresentati dalle qui annesse tabelle.

* *

Per il primo esperimento riassunto dalla tabella I, furono sensibilizzate con c. c. 0.02 rispettivamente di siero di cavallo e di montone un certo numero di cavie, le quali al 13° giorno di incubazione vennero divise in due gruppi distinti, il 1.° dei quali fu antianafilattizzato verso il solo siero di cavallo mediante iniezione endoperitoneale di c. c. 0,5 - 1, mentre il 2.° gruppo fu lasciato per la determinazione della dose letale dei due antigeni, che venne effettuata il giorno successivo e che risultò uguale a c. c. 0,05 per il siero di cavallo ed a c. c. 0,1 per quello di montone.[1]

Appena stabilita la dose letale dei due antigeni, alcuni degli animali del primo gruppo furono reiniettati endove-

[1] In seguito all' iniezione dissensibilizzante alcuni animali morirono durante la notte.

Digitized by Google

nosamente con siero omologo (siero di cavallo) per stabilire il grado di difesa specifica, le altre furono trattate con siero eterologo (siero di montone) per determinare il grado di difesa aspecifica. In tal guisa la differenza tra le due difese veniva constatata in base al comportamento di animali diversi. Essa però in questa serie, come mostra la tavola I, fu stabilita anche sullo stesso animale, mediante una seconda iniezione endovenosa di multipli di dosi letali di siero eterologo in cavie che il giorno prima avevano sopportato l' iniezione endovenosa di antigeno omologo.

Digitized by Google

TAVOLA I.

Dose letale del siero di cavallo = c. c. 0,05

» » » » » montone = » 0,1

Num. delle cavie	Peso gr.	Sensibilizzazione sottocutanea	Iniezione endoperitoneale antianafilattizzante, praticata 13 giorni dopo la preparazione sottocutanea	I. Iniezione endovenosa, eseguita dopo 18-24 ore dalla iniezione antianafilattizzante		II. Iniezione endovenosa, praticata 18-24 ore dopo la I. iniezione endovenosa	
				Dosi letali di antigene iniettate	Risultato	Dosi letali di antigene iniettate	Risultato
15	270	c. c. 0,02 siero cavallo c. c. 0,02 siero mont.	c.c. 1 siero cavallo	50 d. l. siero cav.	Nessun sintomo. Vive	10 d. l. siero montone	Grave anafilassi. Vive
16	260	»	» » »	80 » » »	» »	15 » » »	» » Muore in 5′
17	280	»	» 0,5 » »	50 » » »	Lieve anafilassi »	10 » » »	» » » in 4 ore
19	280	»	» » »	80 » » »	Nessun sintomo »	15 » » »	» » Vive
20	300	»	» » »	$2^1/_2$ » siero mont.	Grave anafilassi »	—	—
21	260	»	» » »	5 » » »	Lieve » »	—	—
23	250	»	» » »	5 » » »	Grave » Muore [in ½ ora	—	—

Digitized by Google

Come si vede dalla tavola I, mentre gli animali reiniettati con siero omologo possono sopportare, si può dire, impunemente, anche fino ad 80 dosi letali di siero omologo, quelli invece trattati con siero eterologo, possono presentare grave crisi anafilattica anche di fronte all' iniezione di 2 $^1/_2$ dosi letali e soccombere, dopo prolungata crisi, in seguito alla inoculazione di cinque dosi letali. Tutto ciòè naturalmente sottoposto a variazioni individuali (cavia 21), le quali tuttavia non possono qui alterare i risultati ottenuti.

Anche in uno stesso animale (cavie 15-16-17-19) risulta evidente la differenza dei risultati tra l' iniezione di antigene omologo ed eterologo. Qui sembra però che la resistenza di fronte al siero eterologo sia maggiore di quella che si può osservare in animali (cavie 20-21-23), i quali dopo la dissensibilizzazione non siano stati sottoposti ad una prima reiniezione endovenosa di siero omologo, ma bensí a quella di siero eterologo. Mentre infatti in quest' ultimo caso la iniezione di cinque dosi letali può aver esito mortale, nel primo caso invece le cavie 15 e 19 sono sopravvissute, dopo un tipico e grava choh anafilattico, alla introduzione di 10 e di 15 dosi letali. Si potrebbe quindi supporre, se il numero degli esperimenti lo permettesse, che, pur sempre rimanendo evidente la differenza tra l'una e l'altra, quanto più elevata diviene la difesa specifica, tanto più elevata si faccia pure quella aspecifica.

* *

Ancora più evidenti sono riusciti i risultati ottenuti dalla serie di animali compresa nella tavola seconda.

Anche qui le cavie doppiamente sensibilizzate con siero di cavallo e di montone, furono sottoposte all' iniezione en-

Digitized by Google

doperitoneale vaccinante dopo quattordici giorni di incubazione. La dose di antigene iniettata endoperitonealmente fu qui di c. c. 1 in tutti gli animali. La dissensibilizzazione fu fatta per il siero di cavallo in una metà degli animali, per il siero di montone nell' altra metà. Dopo 24 ore circa gli animali vaccinati con siero di cavallo furono rieniettati endovenosamente in parte con siero omologo, in parte con siero eterologo: ugualmente fu praticato con quelli vaccinati col siero di montone. La dose letale dei due antigeni venne determinata prima della reiniezione endovenosa in un certo numero di cavie doppiamente sensibilizzate ed appartenenti alla stessa serie. La dose letale del siero di cavallo risultò eguale a c. c. 0,5, quella del siero di montone a c. c. 0,1.

Per ragioni indipendenti alla mia volontà non fu potuta praticare negli animali sopravvissuti la seconda iniezione endovenosa, allo scopo di paragonare nello stesso animale la difesa contro il siero omologo e quella contro il siero eterologo.

Digitized by Google

Digitized by Google

TAVOLA II.

Dose letale del siero di cavallo = c. c. 0,5
» » » » » montone = » 0,1

Num. dell'animale	Peso	Sensibilizzazione sottocutanea	Iniezione endoperitoneale antianafilattizzante, praticata 14 giorni dopo la preparazione sottocutanea	Iniezione endovenosa eseguita 18-24 ore dopo la iniezione antianafilattizzante	
				Dosi letali di antigene iniettate	Resultato
301	300	0,02 siero cavallo 0,02 siero montone	c. c. 1 siero cavallo	10 d. l. siero cavallo	Nessun sintomo - Vive
295	300	» » »	» » »	» » »	» » »
268	260	» » »	» » »	» » »	» » »
284	250	» » »	» » »	» » »	» » »
293	250	» » »	» » »	» » »	Grave anafilassi - Muore in 4′
278	250	» » »	» » »	» » »	Nessun sintomo - Vive
294	300	» » »	» » »	» » »	» » »
298	250	» » »	» » »	» » »	Grave anafilassi - Muore in 5′
297	250	» » »	» » »	1 d. l. siero montone	» » » 3′
272	300	» » »	» » »	» » »	» » » 5′
287	290	» » »	» » »	» » »	» » » 4′

Digitized by Google

263	300	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	4′
308	250	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	3′
270	250	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	4′
260	270	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	- Vive	
267	280	»	»	»	c. c. 1 siero montone			5	d. l. siero montone			Nessun sintomo	»	
291	250	»	»	»	»	»	»	10	»	»	»	»	»	»
264	250	»	»	»	»	»	»		»	»	»	»	»	»
296	300	»	»	»	»	»	»		»	»	»	»	»	»
269	250	»	»	»	»	»	»		»	»	»	Grave anafilassi		»
265	270	»	»	»	»	»	»		»	»	»	Nessun sintomo		»
277	300	»	»	»	»	»	»	16	»	»	»	Grave anafilassi - Muore in 5′		
285	250	»	»	»	»	»	»	1	d. l. siero cavallo			Lieve anafilassi - Vive		
304	250	»	»	»	»	»	»		»	»	»	Grave	»	»
275	270	»	»	»	»	»	»	2	»	»	»	Grave anafilassi - Muore in 4′		
289	250	»	»	»	»	»	»		»	»	»	»	»	» 5′
306	250	»	»	»	»	»	»		»	»	»	»	»	- Vive
271	270	»	»	»	»	»	»		»	»	»	»	»	- Muore in 4′
313	300	»	»	»	»	»	»	3	»	»	»	Lieve anafilassi - Vive		

Digitized by Google

La tavola II è così dimostrativa che non vi è bisogno di speciali note esplicative. In essa si vede come, mentre da una parte in una serie di tredici cavie iniettate endovenosamente con dieci dosi letali di siero omologo, dieci di esse non presentarono alcun disturbo, una sopravvisse ad una grave crisi anafilattica e due sole soccombettero in pochi minuti con tipica crisi, d' altra parte in una serie di quattordici cavie trattate invece con siero eterologo, sei morirono in seguito all' iniezione di una sola dose letale, tre soccombettero dopo l' inoculazione di due dosi letali, quattro presentarono gravi fenomeni anafilattici (dispnea, convulsioni, paralisi, stato comatoso) rispettivamente per introduzione di 1-2-3 dosi letali, ed una sola mostrò lievi fenomeni anafilattici con una sola dose letale.

★ ★

Secondo Friedberger la vera antianafilassi, oltre ad essere specifica ed a subentrare rapidamente, avrebbe la caratteristica di una lunga durata, mentre la resistenza non specifica se ne distinguerebbe per la sua rapida scomparsa.

Nello studio della questione che qui ci interessa anche questo carattere differenziale non poteva naturalmente essere trascurato, e fu appunto con questo scopo che venne instituita la serie di esperienze riassunta nella tavola III.

Come da essa risulta, le cavie di questa serie vennero sensibilizzate con albumina di uovo e con siero di cavallo. Praticata la vaccinazione al 15° giorno d' incubazione mediante introduzione endoperitoneale di c. c. 0,5 di albumina d' uovo in una parte di animali, e di c. c. 0,5 di siero di cavallo negli altri, dopo trascorsi cinque giorni da essa si procedette alla iniezione endovenosa degli antigeni. Inoltre

Digitized by Google

le cavie antianafilitizzate e sopravvissute alla prima iniezione di antigeno omologo vennero sottoposte dopo 24 ore ad una seconda iniezione di quello eterologo, alfine di stabilire anche qui in uno stesso animale la differenza o meno tra difesa specifica ed aspecifica. La dose letale dei due antigeni fu stabilita come al solito e risultò di c. c. 0.05 per l'albumina d'uovo e di c. c. 0,5 per il siero di cavallo.

Digitized by Google

TAVOLA III.

Dose letale dell'albumina d'uovo = c.c. 0,05

» » del siero di cavallo = » 0,5

Num. dell'animale	Peso	Sensibilizzazione sottocutanea	Iniezione endoperitoneale antianafilattizzante, praticata 15 giorni dopo la preparazione sottocutanea	I. Iniezione endovenosa praticata 5 giorni dopo la iniezione antianafilattizzante		II. Iniezione endovenosa praticata 18-24 ore dopo la prima	
				Dosi letali iniettate	Risultato	Dosi letali iniettate	Risultato
212	300	0,02 siero di cavallo 0,02 album. d'uovo	c.c. 0,5 alb. d'uovo	10 d. l. alb. d'uovo	Grave anaf. Muore in 7′	—	—
237	260	»	» »	8 » »	» » » in ½ ora	—	—
243	250	»	» »	6 » »	» » » in 5′	—	—
211	250	»	» »	4 » »	Nessun sintomo. Vive	1 d. l. siero cavallo	Grave anaf. Muore in 5′
222	250	»	» »	» » »	Lieve anaf. »	» » » »	» » Vive
233	290	»	» »	» » »	Grave » Muore in 4′	—	—
227	250	»	» »	» » »	» » » in 5′	—	—
206	260	»	» »	2 » »	Lieve anaf. Vive	1 d. l. siero cavallo	Grave anaf. Muore in 10′
219	280	»	» »	2 d. l. siero cavallo	Grave anaf. Muore in 3′	—	—
231	250	»	» »	1 » »	» » » in 4′	—	—

Digitized by Google

223	280	»	» »	» » »	» » » in 4″	—	—
240	290	»	» »	» » »	» » Vive	—	—
216	270	»	» »	» » »	» » Muore in 15′	—	—
234	280	»	c.c. 0,5 siero cav.	10 d. l. siero cavallo	» » Muore in 7′	—	—
230	270	»	» »	8 » »	» » Vive	1 d. l. alb. uovo	Grave anaf. Muore in 5′
214	260	»	» »	6 » »	» » »	» » » »	» » » in $^{1}/_{2}$ ora
221	260	»	» »	5 » »	» » »	» » » »	» » Vive
242	260	»	» »	» » »	» » Muore in $^{1}/_{2}$ ora	—	—
213	280	»	» »	4 » »	Lieve » Vive	1 d. l. alb. uovo	Grave anaf. Vive
							—
215	250	»	» »	4 d. l. album. uovo	Grave anaf. Muore in 1 ora	—	—
241	250	»	» »	» » »	» » » in 5′	—	—
228	260	»	» »	3 » »	Lieve » Vive	—	—
225	280	»	» »	2 » »	» » »	—	—
218	270	»	» »	» » »	Grave » »	—	—
238	300	»	» »	» » »	» » Muore in 1 ora	—	—
229	250	»	» »	1 » »	» » Vive	—	—

Digitized by Google

Uno sguardo anche rapido alla tavola terza mostra come l'antianafilassi specifica negli animali di questa serie sia tale da non aversi piú difesa neppure di fronte alla introduzione di quattro dosi letali di antigeno omologo.

Per quanto invece riguarda la difesa contro l'antigene eterologo non si possono trarre da questa esperienza delle deduzioni sicure: mentre infatti nelle cavie vaccinate con albumina d'uovo e reiniettate endovenosamente con siero di cavallo, la morte sopravviene in generale anche di fronte alla introduzione della semplice dose letale, nelle cavie invece vaccinate con siero di cavallo e reiniettate con albumina d'uovo si ebbe ad ossservare la loro sopravvivenza anche in seguito ad iniezione di tre dosi letali d'antigene eterologo.

Stando quindi a questi risultati, già dopo cinque giorni dalle vaccinazione non sarebbe quasi più possibile distinguere tra antianafilassi specifica e resistenza non specifica, come vuole Friedberger. Tuttavia — pur senza pronunciarmi intorno alla esistenza o meno della distinzione di Friedberger — io non ritengo che i risultati di questa serie di esperimenti possano senz'altro autorizzare a negarle ogni valore.

È noto infatti che per ottenere una completa antianafilassi specifica, a parte le variazioni individuali che qui non possono essere prese in considerazione, la quantità vaccinante di antigene è dipendente dal grado della ipersensibilità esistente negli animali di esperimento: tanto piú forte è questa, tanto più grande deve essere quella. Dato ciò, è evidente come i risultati di questo esperimento possono essere la conseguenza non del fatto che l'antianafilassi specifica sia andata via via riducendosi nell'intervallo tra iniezione vaccinante e iniezione di antigeno omologo, ma piuttosto del fatto che in questa serie la iniezione antianafilattizzante di

Digitized by Google

c. c. 0,5 di antigeno non è stata sufficiente a determinare negli animali un adeguato grado di resistenza specifica.

Non di raro infatti, lavorando nel campo dell' antianafilassi in animali sensibilizzati, sia con un solo antigeno che con due, si presenta l' occasione di rilevare come tra due serie di animali, pure essendo eguali tutte le condizioni di esperimento (qualità e quantità di antigeni adoperati, periodo d' incubazione, via di vaccinazione antianafilattica, dose di antigene, intervallo tra vaccinazione e reiniezione endovenosa di prova) esistano anche notevolissime differenze nel grado di difesa antianafilattica. Ciò indubbiamente deve dipendere dal fatto della esistenza di un grado differente di ipersensibilità nelle due serie di animali, il quale a sua volta deve essere dipendente non solo dal diverso modo di reagire dei singoli animali, ma forse anche da impoderabili fattori insiti negli antigeni che hanno servito sia per la sensibilizzazione come per la dissensibilizzazione.

Malgrado dunque che i risultati di questa serie non siano da paragonarsi a quelli delle serie precedenti, tuttavia anche da essi risulta evidente una lieve differenza tra antianafilassi specifica e resistenza non specifica, specialmente quando si considerino gli effetti della reiniezione dell' antigeno omologo con quelli dell' antigeno eterologo nello stesso animale.

* *

Sulla base adunque dei risultati ottenuti negli esperimenti presenti, mi sembra non si possa negare la reale esistenza di una antianafilassi specifica determinata da una parziale neutralizzazione di anticorpi anafilattici, la quale deve essere tenuta distinta dal maggior grado di resistenza, che indipendentemente dalla partecipazione di anticorpi, è stata

Digitized by Google

dimostrata di fronte a svariate sostanze, quali peptone, anafilotossina, estratti di organi, sieri tossici ecc. Una tale resistenza non specifica risulta chiaramente anche dalle tavole qui annesse: essa anzi apparisce qui tanto più grande, quanto più forte è il grado dell'antianafilassi specifica, pur rimanendo tra l'una e l'altra sempre notevoli differenze.

Ciò ammesso, dobbiamo ora domandarci quali possono essere i fattori che determinano la suddescritta resistenza non specifica. È essa la conseguenza del consumo di determinate sostanze, oppure dell'esaurimento funzionale di certi apparati reagenti, od infine della formazione di una sostanza antagonista che protegga contro il veleno anafilattico? I dati sperimentali raccolti finora non sono sufficienti a chiarire questa importante questione. Per il momento quindi sarebbe veramente azzardato voler dare in proposito una risposta precisa.

Però proprio recentemente Bordet ha comunicato all'Accademie Medicale de Belgique delle interessanti esperienze mediante le quali, con tutta riserva, a vero dire, egli ritiene probabile che l'aumento di resistenza sia dovuto alla formazione di un principio protettivo.

Dopo essere riuscito già da lungo tempo ad ottenere la formazione d'anafilotossina in vitro, mescolando del siero fresco di cavia con una sospensione di agar, ora il Bordet comunica che la stessa anafilotossina può essere ettenuta anche in vivo, mediante iniezione endovenosa di 1-2 c. c. di di agar in una cavia normale.

Mediante questo trattamento dopo circa 4-8 minuti l'animale presenterebbe, secondo Bordet, dei fenomeni in tutto simili quelli della crisi anafilattica. Tale constatazione, indipendentemente dal Bordet, potè essere fatta anche da Novy e De Kruif e da Zunz.

Digitized by Google

Da tale interessante osservazione il Bordet fu logicamente condotto ad istituire degli esperimenti intorno all' antianafilassi. A questo scopo egli iniettava endovenosamente a delle cavie normali una dose submortale di agar e dopo qualche ora o il giorno appresso reiniettava loro, sempre endovenosamente, una dose mortale di agar. Egli vedeva così che questi animali resistevano alla iniezione. Se ora dissanguava questi animali sopravvissuti insieme ad altre cavie normali di controllo, ed il giorno dopo metteva a contatto tanto il siero ottenuto dalle prime quanto quello delle seconde sia con agar, sia con globuli di coniglio sensibilizzati con siero di cavia anticoniglio inattivato a 56°, allora egli notava che dopo contatto di due ore a 37° il siero delle cavie vaccinate con agar non era divenuto tossico per animali nuovi, mentre il siero proveniente dalle cavie normali determinava la morte negli animali, cui era iniettato, dopo una tipica crisi anafilattica. Di fronte a questi risultati Bordet si è domandato se il siero delle cavie precedentemente trattate con agar sia veramente inadatto alla formazione del veleno per scomparsa di una sostanza necessaria a tale formazione, oppure se, non essendo impedita la produzione del veleno, quello contenesse un principio che proteggesse contro il veleno stesso. Tra le due ipotesi, come abbiamo detto, egli propende per la seconda, per il fatto che delle cavie iniettate con dosi subletali di agar sopportano meglio di quelle normali l' introduzione di anafilotossina preparata con siero di cavia ed agar. In ogni modo per Bordet il fattore che presiede alla antianafilassi sarebbe di natura umorale.

Sullo stesso soggetto è ritornato proprio recentemente Besredka pubblicando negli Annales de l' Institut Pasteur alcune critiche, corredate da esperimenti personali, intorno ai suesposti concetti di Bordet.

Digitized by Google

Mentre da una parte Besredka rileva che il quadro sintomatico presentato dalle cavie iniettate endovenosamente con agar differisce essenzialmente da quello della tipica crisi anafilattica, d'altra parte egli sostiene che l'immunità che Bordet ottiene contro l'anafilotossina non ha nulla a che fare con quella che si verifica nel vero stato anafilattico.

Secondo Besredka infatti l'iniezione endovenosa di agar, fatta in due tempi, in una cavia sensibilizzata con siero di cavallo non è capace di difendere l'animale contro una successiva reiniezione di una semplice dose mortale di siero di cavallo, al contrario la vaccinazione con iniezioni subentranti di antigene in un animale sensibilizzato con siero di cavallo non difende contro la successiva iniezione endovenosa di una dose minima mortale di agar. Riguardo infine alla comparsa di una sostanza antagonista, di una antianafilatossina negli animali dissensibilizzati, Besredka non contesta la comparsa di essa nelle esperienze di Bordet, ma non ammette che si paragoni questa antianafilatossina con l'antianafilassi. Se infatti si sensibilizzano delle cavie con siero di cavallo, ed in seguito si antianafilattizzano fortemente, e 3 ore dopo le dissanguiamo, mettendo poi a contatto per 3 ore a 37° il siero così ottenuto con la sospensione di agar e quindi centrifugando ed iniettando endovenosamente a cavie nuove, queste vengono immediatamente colpite da fenomeni anafilattici. Perciò, secondo Besredka, tale siero non poteva possedere alcuna traccia di sostanze antagoniste, dal momento che le cavie hanno reagito vivacemente.

Oltre che dagli esperimenti surriferiti di Besredka, la comparsa di un principio protettivo contro il veleno anafilattico nel vero stato antianafilattico a me pare che possa essere esclusa anche dalle ricerche qui riferite. Se infatti nella antianafilassi si formasse realmente una sostanza

Digitized by Google

che vaccinasse contro il veleno anafilattico, non avrebbe allora più ragione di sussistere la differenza da me trovata tra antianafilassi specifica e non specifica, ammessa dallo stesso Bordet, in quanto che il veleno anafilattico, cioè l'anafilotossina, deve essere in tutti i casi considerata come una sostanza unica. Ciò che viene pure esplicitamente affermato dal Bordet, quando a pagina 599 del suo recente trattato egli scrive: « Il semble en consequence que dans tous les cas la matiere qu'on doit incrimines soit la même ». La sostanza determinante lo schock non è, sempre secondo Bordet, un veleno originantesi da sostanze estranee: « c'est un principe existant dans l'organisme même ou qui tout au moins provient de materiaux fournis par l'organisme. Pour que ce principe apparaisse ou puisse entrer en action le milieu doit subir une certaine influence, que diverses matieres sont capables d'exercer: tel est la gelose, tel sont aussi les complesses nès de la rèaction de l'anticorps sur l'antigens ».

Dopo ciò a me sembra che, non potendosi per il momento accettare il concetto della formazione d'una antianafilotossina, l'ordine di ricerche su cui Bordet ha basato il suo modo di vedere in proposito, sia passibile di un'altra spiegazione.

È infatti da tempo noto come Friedberger e Jerusalem, abbiano potuto descrivere una certa azione svelenatrice del carbone animale sulla anafilotossina già formata, e come Sachs e Ritz abbiano a loro volta riscontrato un completo svelenamento dell'anafilotossina ottenuta con prodigioso, mediante un successivo contatto sia con caolino, sia con nuove colture di prodigioso, sia infine con vibrioni di Metschnikoff. Secondo questi autori quindi anche l'aggiunta successiva alla anafilotossina della stessa sostanza, da cui è stata ottenuta, può influire su di essa in modo da renderla più o meno completamente inattiva.

Digitized by Google

Se ora noi poniamo in relazione l'osservazione di Bordet, cioè che il siero ottenuto da cavie vaccinate con iniezione endovenosa di agar, non diviene più tossico allorquando viene mescolato in vitro con nuovo agar, con quanto hanno descritto in vitro Friedberger e Jerusalem e Sachs e Ritz, viene allora spontanea la domanda, se anche nel caso dell'esperimento di Bordet si tratti di una eventuale azione svelenatrice, esercitata sulla anafilotossina, formatasi in vivo in seguito alla iniezione di agar, per opera del successivo contatto in vitro con una nuova quantità di agar, nel qual caso poichè il fenomeno si verificherebbe in vitro, sarebbe necessariamente da escludersi la formazione di una antianafilotossina.

Per stabilire appunto se il duplice contatto in vitro del siero di cavia con agar era capace di dimostrare quanto Sachs e Ritz avevano descritto a proposito dell'anafilotossina da prodigioso, io ho istituito delle ricerche, i risultati di alcune delle quali potrebbero essere interpretati in senso affermativo, se fossero ottenuti con maggior frequenza, in modo da evitare il dubbio di essere piuttosto di fronte a variazioni individuali di resistenza dei singoli animali.

Forse la questione potrebbe essere definita per mezzo di altre ricerche, nelle quali venisse modificato il procedimento sperimentale di Sachs e di Ritz.

Ad ogni modo la possibilità di disintossicare mediante l'azione di sostanze adsorbenti non può essere a priori esclusa quando si consideri che appunto con queste sostanze la tossicità dei sieri primariamente tossici, quali il siero di bue, può essere notevolmente diminuita, come io stesso ho potuto dimostrare in una mia breve nota.

Digitized by Google

★ ★

Dopo ciò sulla base delle presenti ricerche mi sembra di poter concludere che:

I. — *Lo stato antianafilattico può essere determinato da due processi differenti, l' uno specifico e strettamente legato ad una neutralizzazione di anticorpi anafilattici, l' altro aspecifico ed indipendente da qualsiasi partecipazione di anticorpi (resistenza non specifica).*

II. *Il grado della resistenza non specifica negli animali doppiamente sensibilizzati apparisce tanto più elevato quanto più forte è il grado dell' antianafilassi specifica.*

III. *L' antianafilassi, sia essa specifica che aspecifica, non è legata alla formazione di una sostanza difensiva, di una antianafilotossina, come Bordet tende ad ammettere.*

BIBLIOGRAFIA.

Bauer. — Centralblatt f. Bakt. Or. Bd. 66, 1912.

Bessau. — » » » 60, 1911.

Bessau, Opitz, Preusse. — Central. f. Bakt. Or. 1914. Bd. 74, pag 162.

» » » — » » » » pag. 310

Besredka. — Annales Inst. Pasteur. Maggio 1920.

Bordet. — Bull. Acad. Royal Med. Belgique. Maggio 1910.

Friedberger e Jerusalem. — Z. f. Imm. Bd. 7, 1910.

Friedberger e Szjmanowsky, Kumagai, Odaira, Lurà. — Z. f. Imm. Bd. 14. N. 4.

Pardi U. — Atti Soc. tosc. Scienze Naturali, Processi verbali, volume XXVIII, 6 luglio 1919.

Ritz e Sachs. — Berl. Klin. Woch. 1911.

Digitized by Google

Capitolo II.

Iniezione sottodurale di anafilotossina ed importanza del sistema nervoso nella crisi anafilattica.

Nella sua memoria del 1917 Besredka, affermando il concetto che l'anafilotossina, ottenuta in vitro, non ha nulla a che fare con fenomeni anafilattici, porta come uno dei principali argomenti della sua tesi il fatto che quella sostanza, mentre è oltremodo tossica per via endovenosa, non produce alcun disturbo, allorquando venga introdotta per via endo-cranica.

Ora la via cerebrale, come appunto fu dimostrato dallo stesso Besredka, sarebbe una delle vie di scelta per determinare la crisi anafilattica, tanto che egli in base a questo fatto stabilì appunto la teoria della natura nervosa dei fenomoni anafilattici.

Questa stessa obiezione però fu già espressa or sono diversi anni da Biedl e Kraus, i quali fino dal 1910 portarono questo ed altri argomenti contro il concetto di Friedberger della identitá del suo veleno con quello anafilattico.

Digitized by Google

Nella discussione che allora ne seguì, Friedberger replicava ai suoi oppositori che il fatto della assenza di ogni azione della anafilotossina iniettata sotto dura, da lui stesso per il primo notato, non era in contraddizione con l' opinione di Besredka, poichè mentre nel caso dell' animale sensibilizzato la fissazione dell' antigeno poteva effettuarsi per opera degli anticorpi sessili delle cellule nervose, nulla invece autorizza ad attribuire una speciale affinità del veleno già formato per le cellule nervose. Anche però facendo astrazione da ciò, l' obiezione doveva necessariamente cadere di fronte alla impossibilità di iniettare per via sottodurale ad una cavia un così grande volume di liquido (almeno due-tre c. c.), corrispondente alla quantità minima di anafilotossina capace di determinare per via endovenosa la morte dall' animale.

Restata sospesa in tal modo la questione, a me è parso di poter tentare di venire ad una soluzione di essa, ricorrendo al procedimento dell' essiccamento dell' anafilotossina, che come è noto, per le ricerche di Friedberger e Jerusalem e per quelle successive di Tchernoroutzky, può essere ridotta a completa secchezza senza perdere le sue proprietà. Evidentemente poi all' anafilotossina secca con opportune diluizioni si può dare il volume che si crede opportuno.

Preparata per ciò dell' anafilotossina tenendo a contatto per due ore a 37° c. c. 25 di siero fresco di cavia con c. c. 2 di sospensione d' inulina 5 % e quindi centrifugando in modo da ottenere di nuovo il siero limpido, questo fu portato in un essiccatore ad acido solforico e essiccato completamente nel vuoto. Ciò ottenuto, l' anafilotossina fu di nuovo sciolta in 3 c. c. di soluzione fisiologica e dopo averne saggiata la reazione che si dimostrò alcalina, fu iniettata sia endovenosamente, sia sotto dura alle seguenti cavie.

Digitized by Google

Cavia I. Peso gr. 200. Iniezione endovenosa di c. c. 1 di anafilotossina concentrata.

Tipica crisi anafilattica. Morte in 2'. All' autopsia enfisema polmonare, persistenza pulsazioni cardiache, ritardo coagulazione sangue.

Cavia II. Peso gr. 200. Iniezione sottodurale di c. c. 1 di anafilotossina concentrata.

Durante l' iniezione contrazioni tetaniche, rapidamente susseguite da paralisi generale e morte immediata al termine dell' iniezione. All' autopsia forte replezione del cuore destro, polmoni afflosciati con piccole emorragie. Nessuna lesione apparente della sostanza cerebrale.

Cavia III. Peso gr. 240. Iniezione sottodurale di c. c. 0,5 di anafilotossina concentrata.

Presenta gli stessi fenomeni della cavia II, seguiti da morte immediata, Reperto necroscopico pure eguale.

Cavia IV. Peso gr. 250, Iniezione sottodurale di c. c. 0,25 di anafilotossina concentrata.

Durante l' iniezione tetano muscolare e paralisi. Si rimette dopo 2' temperatura dopo 15' = 39,5.

Come si vede da questo esperimento, mentre l' iniezione endovenosa di c. c. 1 di anafilotossina concentrata determina la morte dell' animale con tipica crisi anafilattica, l' iniezione sottodurale invece determina pure la morte, ma con fenomeni alquanto diversi, ciò che logicamente faceva pensare che in quest' ultimo caso essi fossero indipendenti dalle proprietà anafilotossiche del siero concentrato. Procedendo infatti ad un secondo esperimento con siero di cavia normale concentrato fu possibile determinare anche con questo lo stesso interessante fenomeno sopra descritto, e si potè così avere la prova che col mezzo delle iniezioni della

Digitized by Google

anafilotossina concentrata restava impossibile di risolvere la questione che ci interessava.

Occorreva quindi affrontare il problema per un' altra via. Questa mi venne indicata dalle ricerche di Novy e De Kruif sulla anafilotosssina con siero di ratto. Questi autori riferiscono infatti nei loro interessanti lavori di essere riusciti ad ottenere da un miscuglio di siero di ratto normale e agar una anafilotossina talmente attiva da uccidere per via endovenosa una cavia di gr. 200 circa, anche alla dose di c. c. 0,25. Tale risultato fu ottenuto da Novy e De Kruif, ricorrendo al metodo da loro detto del sol-gel e consistente nello aggiungere al siero di ratto scaldato a 37° determinate quantità di agar al 0, 5 % disciolto e mantenuto allo stato di sol in un bagno maria a 37°. Agitata la miscela per circa un minuto, essa viene quindi portata in ghiaccio per 1-2 ore, durante le quali il sol di agar si trasforma in gel. Trascorso il tempo voluto, l' agar viene allontanato mediante centrifugazione, e il siero così ottenuto è pronto per essere iniettato.

Attenendomi a questa tecnica anch' io sono riuscito ad ottenere più d' una volta della anafilotossina attivissima con la quale potei affrontare lo studio della questione propostami.

A dimostrazione dei risultati ottenuti con questo mezzo, riporto integralmente il seguente portocollo di esperimento: si prepara la anafilotossina mescolando c. c. 5 di siero fresco di ratto con c. c. 0,5 di agar secondo le prescrizioni di Novy e De Kruif. Dopo un' ora di permanenza in ghiaccio, la miscela viene centrifugata per allontanare l' agar ed il siero limpido si inietta a cavie di gr. 170-200.

Cavia I. Peso gr. 170. Iniezione endovenosa di c. c. 0,25 di anafilotossina. Grave crisi anafilattica. Si rimette in 2'.

Digitized by Google

CAVIA II. Peso gr. 200. Iniezione endovenosa di c. c. 0,5 di anafilotossina. Gravissima crisi anafilattica, muore in 3'. All' autopsia quadro caratteristico.

CAVIA III. Peso gr. 170. Iniezione sottodurale di c. c. 0,75 di anafilotossina. Durante l' iniezione tetano muscolare. Terminata l' iniezione l' animale presenta dispnea, rimanendo abbattuto su di un fianco per circa 6 minuti: quindi si rialza presentandosi però ogni tanto irrequieto ed eccitato. Temperatura dopo 15° = 37.2.

Da questo esperimento, risulta dunque che mentre per via endovenosa l' anafilotossina, ottenuta con siero di ratto, si dimostra letale alla dose di c. c. 0,5 iniettata invece per via sottodurale anche alla dose di c. c. 0,75 determina solo qualche fenomeno morboso, decorrente in modo del tutto differente da quello che si può osservare durante una tipica crisi anafilattica anche non letale.

Risultati analoghi si ottennero pure anche in successivi esperimenti, cosicchè si deve concludere che l' anafilotossina iniettata per via sottodurale non è capace di determinare la crisi anafilattica.

Se però questa conclusione si impone dopo i risultati suesposti, non mi pare d' altra parte che solo per questo fatto si debba negare senz' altro l' identità del veleno anafilattico con l' anafilotossina che si ottiene in vitro, giacchè a parte l' esistenza di numerose altre analogie, bisogna anche considerare che le condizioni di esperimento sono nell' uno e nell' altro caso differenti e che nulla vieta di pensare con Friedberger che mentre l' antigeno trova nel cervello dell' animale sensibilizzato delle condizioni adatte per essere immediatamente fissato, il veleno già formato invece non possederebbe alcuna speciale affinità per le cellule nervose. Ma per quanto possibile, questa ipotesi che non contradi-

Digitized by Google

rebbe la teoria di Besredka sulla sede nervosa della reazione anafilattica, non risulta basata su alcun dato di fatto.

A me pare che la cosa potrebbe essere forse meglio spiegata in altra maniera, considerando cioè che come si osservano effetti differenti tra l' iniezione sottodurale di anafilotossina e quella di antigeno in animale sensibilizzato, così uguali differenze si possono constatare tra l' iniezione endoperitoneale e anche sotto cutanea dell' una e dell' altro. Mentre infatti l' anafilotossina si mostra innocua allorquando viene iniettata sotto cute, endoperitonealmente o sottodura, la iniezione sottocutanea endoperitoneale o sottodurale di antigene può uccidere un animale sensibilizzato. Si osserva quindi che non è tanto la sede di iniezione che determina la differenza di risultati, quanto un diverso fattore. Se infatti la reiniezione di antigeno può provocare la crisi anafilattica non solo quando venga introdotto per via sottodurale, ma anche per via endoperitoneale e persino sottocutanea, ciò significa che l' antigeno dal peritoneo e dal tessuto sottocutaneo è stato riassorbito e condotto là dove ha trovato le condizioni favorevoli a dare insieme all' anticorpo la reazione anafilattica.

Al contrario succede per l' anafilotossina, la quale tanto se inoculata nel cervello, quanto nel peritoneo o sottocute non è più capace di determinare quegli stessi fenomeni che avrebbe indubbiamente provocato per via endovenosa.

La spiegazione di questo diverso comportamento risulterà facilmente, quando si consideri che, mentre per provocare la crisi in animali sensibilizzati possono essere sufficienti anche piccolissime quantità di antigeno, le quali agevolmente potranno essere rapidamente riassorbite anche se iniettate sottocute o nel peritoneo, la quantità invece di anafilotossina necessaria a determinare gli stessi effetti è assai

Digitized by Google

notevolmente più grande, di modo chè per il suo completo riassorbimento occorrerà un tempo incomparabilmente più lungo. Cosicchè in ultima analisi nel caso dell' anafilotossina potrà stabilirsi uno stato antianafilattico.

Data dunque la possibilità suesposta, anche la constatazione che l' anafilotossina non agisce per via sotottodurale non può autorizzare senz' altro ad escludere che essa non sia identica al veleno, che si forma nell' animale sensibilizzato in seguito alla reiniezione dell' antigeno.

Così stando le cose, noi dobbiamo allora, come logica conseguenza di quanto sopra si è esposto, trarre la conclusione che il sistema nervoso centrale non rappresenta almeno fino a prova contraria, la sede ove ha luogo la reazione dominante della crisi anafilattica, in quanto che in tal caso l' anafilotossina dovrebbe manifestarsi attivissima allorquando viene portata direttamente a contatto del tessuto nervoso centrale.

Contro l' ipotesi del Besredka, del resto stanno oramai numerose ricerche, tra cui quelle di Schürer e Strasman, di Auer, di Pearch e Eisemberg ecc., nelle quali, malgrado che venisse più o meno soppressa la funzione del cervello, fu possibile osservare egualmeute la comparsa di fenomeni anafilattici.

Con questo naturalmente non intendo affermare che il sistema nervoso centrale non partecipi affatto alla produzione dei sintomi anafilattici, ma solo che ad esso non mi sembra debba essere logicamente attribuita tutta l' importanza che gli è stata accordata da Besredka.

Escluso il cervello come sede fondamentale dei fenomeni anafilattici, a noi non resta che ricondurre quei fenomeni ad una reazione che si svolga in primo luogo nel circolo sanguigno, come del resto tendono a dimostrare i risultati

Digitized by Google

di numerose ricerche, alcune delle quali sono state ricordate nel presente lavoro.

* *

Riassumendo ora quanto sono venuto esponendo fin qui, io credo di poter concludere *che il fatto definitivamente stabilito dalle presunti ricerche, che cioè l' anafilotossina iniettata sottodura non è capace di determinare i fenomeni anafilattici, non è sufficente a autorizzare a ritenere che l' anafilotossina in vitro e il veleno anafilattico in vivo siano realmente di natura differente.*

La diversità degli effetti delle iniezioni subdurali di anafilotossina da una parte e di antigene in animale sensibilizzato dall' altra, è determinata dal fatto che mentre per provocare la crisi nel secondo caso bastano quantità anche minime di antigene, che possono essere facilmente e rapidamente assorbite, nel caso invece dell' anafilotossina occorrono quantità molto più forti che per essere riassorbite impiegheranno un tempo notevolmente più lungo, durante il quale puó stabilirsi nell' animale uno stato antianafilattico.

Il sistema nervoso centrale non può essere considerato come sede fondamentale dei fenomeni anafilattici, poichè in caso affermativo non si potrebbe comprendere perchè l' anafilotossina rimanga inefficace allorquando viene portata a diretto contatto col tessuto nervoso. Tutto quindi induce a ritenere che la sede della reazione anafilattica sia in primo luogo da ricercarsi nel sangue.

Pisa, Settembre 1920.

Digitized by Google

BIBLIOGRAFIA.

AUER e ROBINSON. — Journ. of exp. med. vol. 18.

BESREDKA. — Anaphylaxie et Antiaphylaxie. Parigi, Masson. ed.

BIEDL e KRAUS. — Ctbl. f. Bakt. Ref. 1910, pag. 25.

» » — Zeith. f. Imm. Or. Bd. 15.

FRIEDBERGER. — » » » 4. 1910.

» — » » » 8. 1911.

» — » » » 15. 1912.

» e JERUSALEM. — Zeith f. Imm. Or. Bd. 7. 1910.

NOVY e DE KRUIF. — Journ. of. infect. dis. 1917.

SCHURER e STRAMANN. — Z. f. Imm. Or. Bd. 12. 1912.

TCHNERNOROUTSKY. — C. r. Sc. Biol. 1913.

Digitized by Google

R. UNIVERSITÀ DI PISA

ANNALI

DELLE

UNIVERSITÀ TOSCANE

NUOVA SERIE — VOL. VI

(XL DELLA COLLEZIONE)

Fascicolo 8.

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE CAV. F. MARIOTTI

Piazza dei Cavalieri, 5

1921

Digitized by Google

Digitized by Google

VIII.

ULISSE DINI

LEZIONI

SULLA TEORIA GENERALE

DELLE SERIE

Digitized by Google

Digitized by Google

LEZIONI SULLA TEORIA GENERALE DELLE SERIE.*

IV. Considerazioni generali sulle serie convergenti o no.

35. Come già dicemmo, il risultato ottenuto dal Cesàro (§ 30 e seguenti) lo condusse a proporre di estendere il concetto di somma delle serie anche a serie divergenti $\sum u_n$ prendendo cioè per loro somma il limite (quando esiste, ed è determinato e finito) delle medie delle somme successive $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ dei loro termini, il quale limite, come già

---

* Come dicemmo già nella prefazione allo scritto « *Sulla moltiplicazione delle serie* » (pubblicato in questi Annali, vol. V, nuova serie fasc. 8., 1920) la Facoltà di Scienze della nostra Università pubblica qui la terza parte del corso di analisi superiore, tenuto dal DINI nel 1918 (ultimo anno del suo insegnamento e della sua vita) sulla teoria generale delle serie, convergenti o meno.

In questa parte del corso il D. analizza i metodi del Cesàro, Poincaré, Stielties, Borel, Sannia ed altri per la sommazione delle serie non convergenti. La trattazione non è compiuta, chè l'aggravarsi del male glielo impedí; ma quanto Egli lasciò scritto (e che qui pubblichiamo) basta a dare una chiara idea del suo pensiero (anche qui originale e profondo) su questo nuovo ed interessante capitolo dell'Analisi.

Digitized by Google

notammo al § 32, nel caso della convergenza riporta alla somma ordinaria della serie; e il teorema di Frobenius che abbiamo dato sopra ed altre considerazioni portavano pure a considerare, in relazione con serie date anche divergenti, queste medie ed i loro limiti.

Con ciò molte serie che non avevano significato venivano ad acquistarlo, come ad es. la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

per la quale le somme successive sono sempre 1 e 0, venivano col nuovo metodo ad avere per somma appunto $\frac{1}{2}$ come pure si era ammesso da tanti fra i quali Leibnitz, Eulero Lacroix ed altri (*).

36. Prima di Abel e di Cauchy ordinariamente non ci si preoccupava affatto della convergenza o divergenza delle serie che si usavano nei calcoli. Pure attribuendo al concetto di somma delle serie il significato ordinario, si facevano bene spesso su esse tutte le operazioni come se fossero somme composte di un numero finito di termini e poichè i risultati che così si ottenevano erano il più spesso giusti, non si aveva alcun ritegno a valersi di quelle serie. Solo qualche voce isolata gettava ogni tanto qua e là dei dubbi come ad es. il D'Alembert che ebbe a dire: « per me confesso che « tutti i ragionamenti fondati sulle serie che non sono con« vergenti mi parrebbero molto sospetti anche quando i ri-

(*) Però anche con questa estensione data da Cesàro al concetto di somma della serie si aveva una limitazione nelle serie da considerare. perchè per quanto dicemmo in nota al § 33, il concetto stesso non si applica che a classi di serie Σu_n, i termini delle quali si mantengono sempre finiti o se crescono indefinitamente con n divengono però infiniti di ordine inferiore al primo.

Digitized by Google

« sultati si accordassero con verità conosciute per altra via » (Op. math. 5. 1768 pag. 183); ma ciò non ostante non si cessava di operare nelle serie senza curarsi se fossero convergenti o no.

Furono Abel e Cauchy i primi che dettero nel modo più reciso l'allarme e al tempo stesso l'ostracismo alle serie divergenti; e dopo i matematici li seguirono senza contrasti fino agli ultimi tempi.

Abel (Oeuvres compl. Edition Sylow-Lie Pag. 256, 257 tome II) dice che « le serie divergenti sono in generale qualche « cosa di ben fatale, ed è una vergogna che si osi fondarci « delle dimostrazioni matematiche, per quanto per la mag- « gior parte dei casi i risultati siano giusti » ciò che egli dice « essere una cosa ben strana della quale si occupava di cercare la ragione » come certamente avrebbe fatto se la morte non lo avesse rapito troppo presto alla scienza.

Cauchy pure fu guidato dagli stessi concetti, tanto che nella prefazione alla sua *Analyse algèbrique* del 1821 dice che è stato *forzato* ad ammettere proposizioni che gli parevano *un poco dure,* fra le quali « quella che una serie divergente non avesse somma ».

37. Negli ultimi tempi invece si è cercato in certo modo di riabilitare le serie divergenti; ma poichè questo si è inteso o almeno si è creduto di farlo col cambiare il concetto ordinario di somma delle serie ed estenderlo artificiosamente in un modo od in un altro, e mentre estensioni simili possono farsene infinite, non ci sembra si possa dire di essere arrivati con questo ad una vera riabilitazione delle serie divergenti. Non si esclude che la considerazione di queste serie in certi casi ed in certi dati modi, o meglio la considerazione della quantità alle quali si è voluto attribuire il nome di somme, senza che propriamente di vere somme si

Digitized by Google

tratti, possano condurre a risultati che hanno una particolare importanza, come meglio accenneremo più oltre, ma con questo non trovo che sia il caso di fare credere o anche soltanto di pensare che si siano sommate così le serie divergenti o che queste, *in quanto sono o si continuano a considerare come serie,* vengano ad acquistare quella importanza che loro veniva negata finora dopo le dichiarazioni di Abel e di Cauchy; e ciò tanto più che i risultati che si avrebbero non si applicano, anche per le serie divergenti, altro che ad alcune categorie di queste serie.

La definizione ordinaria di somma di una serie è quella che nasce spontanea, e come conseguenza naturale, della stessa definizione della serie, nella quale l'ordine dei termini è fissato. Quest'ordine ha esso pure una parte importante, perchè quando una serie è data, viene stabilita, per la sua definizione stessa, la legge per la formazione successiva dei suoi termini, e quindi l'ordine riesce naturalmente fissato, e restano fissate le somme successive dei suoi termini. Mutando l'ordine di successione dei termini, la serie viene nel fatto a cambiare per quanto ogni termine della serie primitiva si ritrovi anche nella nuova e viceversa, e s'intende quindi come la sua somma, intesa nel senso ordinario, dipendendo dalla natura delle somme successive e quindi dallo ordine che hanno i termini nella serie, possa venire a cambiare; e solo quando i limiti relativi risultino del tutto indipendenti dall'ordine dei termini, la serie verrà ad essere convergente o divergente indipendentemente dall'ordine che avranno i suoi termini, pure potendo, come è ben naturale, anche serie che non sono in questo caso, sotto certe condizioni sulle quali ha fatto studi il Borel nel Bulletin des sciences mathem. Vol. XV, pag. 97, conservare la stessa somma per *determinati* spostamenti dei loro termini.

Digitized by Google

38. Cesàro, dicendo che in sostanza non è che una convenzione anche quella che ordinariamente si prende come definizione della somma della serie (*), e osservando che per essa ne vengono forti limitazioni nelle serie che possono considerarsi perchè vengono ad escludersi le serie divergenti, emette l'idea che anche con altri concetti possano definirsi le somme delle serie; ed Egli dà dapprima quella definizione (che sebbene alquanto arbitraria essa pure potrebbe però dirsi ancora abbastanza naturale) chiamando cioè somma delle serie, anche se divergenti, il limite delle medie successive $\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$ quando esiste e che, come già notammo,

(*) Ammettiamo pure col Cesàro che sia una convenzione quella che fissa l'ordinario concetto di somma della serie come limite delle somme successive dei loro termini, ma non è meno vero però che essa è la convenzione la più naturale in quanto nasce naturalmente dalla definizione delle serie. Le serie in sostanza secondo la definizione si costruiscono come aggregati o somme limiti per le quali il numero dei termini che successivamente si aggregano va sempre crescendo; ed è naturale che di queste somme che successivamente si ottengono si consideri anche il limite, e che a questo limite, quando esiste ed è determinato e finito si dia il nome di *somma* della serie (*serie convergenti*), senza occuparsi di quelle serie che pel modo secondo cui vengono costruite danno luogo a somme successive che non hanno affatto un limite determinato e finito (*serie divergenti*) salvo in pochi casi per quelle per le quali questo limite è infinito.

È questo del resto quello che si fa in tutti i casi dello stesso genere, come ad es. per gli integrali fra limiti infiniti, pei quali si considerano successivamente gli integrali estesi a intervalli finiti ognor più grandi, e per valore dell'integrale fra limiti infiniti si prende il limite degli integrali che successivamente si ottengono quando questo limite esiste. Così dunque anche per questi integrali, quando il limite è infinito o non esiste affatto, si potrebbero fare quelle estensioni per la definizione delle quali si tratta qui per le serie; ma tali estensioni, almeno finora, nessuno ha pensato a farle.

Digitized by Google

nel caso della convergenza si riduce ancora alla somma ordinaria; ma poi, guidato dai concetti stessi che si seguono nella teoria degli errori di osservazione quando dal caso delle osservazioni di ugual precisione si passa al caso delle osservazioni di precisione o di pesi diversi, va ancor più nel campo dell'arbitrarietà estendendo la sua definizione coll'attribuire in certo modo a ciascuna delle somme $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ un *peso,* come appunto si fa nella detta teoria degli errori di osservazione, e prende per somma della serie il limite della espressione

$$1) \qquad \frac{a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

nella quale $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri positivi convenientemente scelti la cui somma cresce oltre ogni limite con n; e anche questa nuova definizione più generale, nel caso della convergenza della serie riporta alla somma ordinaria (*).

(*) Nel caso delle serie convergenti, indicando con s la somma della serie e con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo, si potrà trovare un numero *finito* m tale che le somme successive s_n per $n > m$ differiscano da s per quantità σ_n il cui modulo è inferiore a σ e si abbia $s - s_n = \sigma_n$; e poichè la somma (1) può scriversi sotto la forma

$$\frac{a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_m s_m}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} + \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} s - \frac{a_{m+1}\sigma_{m+1} + a_{m+2}\sigma_{m+2} + \ldots + a_n \sigma_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n},$$

si osserverà che essendo m finito al crescere indefinito di n il primo termine avrà per limite zero, il secondo ha per limite s perchè, essendo $\frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} = 1 - \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}$, il coefficiente di s ha per limite uno, e il terzo termine per questa stessa ragione ha un modulo inferiore a σ; e così si concluderà subito che nel caso delle serie convergenti la espressione (1) ha appunto per limite la somma s della serie.

Digitized by Google

Ma entrando in questa via si comprende bene che quando sia data una serie, convergente o no, secondo il significato ordinario di queste parole, nulla esclude che possano farsi sempre combinazioni o operazioni sui suoi termini, con leggi determinate che conducano alla considerazione di certi elementi, dai quali con operazioni di limite o altro possano ricavarsene altri che, oltre ad avere un significato, abbiano anche una particolare importanza, e sia pure che si faccia questo sempre colla condizione che si verifica per la espressione (1), quella cioè che nel caso della convergenza riconducano alla ordinaria somma della serie; ma se in ogni caso (cioè sia che la serie sia convergento o no) anche a questi o ad alcuni di questi elementi si vorrà attribuire il significato o il nome di *somma* della serie, e la serie, anche se non convergente nel senso ordinario, si vorrà dirla *serie sommabile,* queste parole « *somma della serie* » o « *serie sommabili* » non avranno che un significato del tutto convenzionale e vago, potendo, anche per una stessa serie non convergente, variare di valore col variare le combinazioni e operazioni che conducono agli elementi medesimi.

39. Così dunque, estendendo ancora il concetto del Cesàro, altre e infinite quantità dipendenti in qualche modo dalla serie data o meglio dai suoi termini possono introdursi nell'Analisi col nome di somma delle serie; e si può ad es. come fa il Borel, arrivare a considerare come somma di una serie, convergente o no, il limite per valori infiniti della variabile, del quoziente di due funzioni intere di una variabile a, la serie denominatore essendo fissa (ma potendo essere qualunque) e quella numeratore dipendendo dalla serie data; come si ha anche dalla espressione (1) del Cesàro quando in questa intendendo estesi all'infinito il numero dei termini si al numeratore che al denominatore,

Digitized by Google

non si parla più del limite della espressione (1) per $n=\infty$ ma prendendo in modo generale $a_n = c_n a^n$, dove le c_n sono quantità costanti e positive, si prende della nuova espressione il limite per $a=\infty$, venendo cioè a chiamare somma della serie il limite per $a=\infty$ del quoziente

$$2) \qquad \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 a + c_2 s_2 a^2 + \ldots + c_n s_n a^n + \ldots}{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + c_n a^n + \ldots}$$

supposto che le serie numeratore e denominatore siano convergenti per qualunque valore finito di a (cioè siano funzioni intere di a) e quella del denominatore non si annulli per nessun valore positivo di a almeno al di là di un certo numero, e cresca indefinitamente al crescere indefinito di a per valori reali e positivi. E anche questa espressione (2), con considerazioni come quelle che facemmo in nota a proposito della espressione (1) di Cesàro, nel caso della convergenza della serie riconduce alla ordinaria somma di questa (*).

(*) In sostanza col porre nella espressione (1) $a_n = c_n a^n$ e supporre senz'altro $n=\infty$ per fare poi crescere anche a all'infinito, si viene a chiamare somma della serie Σu_n il doppio limite

$$\lim_{a=\infty} \lim_{n=\infty} \frac{c_0 + c_1 s_1 a + c_2 s_2 a^2 + \ldots + c_n s_n a^n}{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n},$$

intendendo che il primo limite (per $n=\infty$) sia preso separatamente al numeratore e al denominatore della frazione e che i limiti corrispondenti siano determinati e finiti per qualunque valore reale e finito di a, e quello del denominatore non si annulli mai per nessun valore diverso da zero e positivo di a, almeno al di là di un certo numero.

Poste le cose in questo modo, s'intende che, ammesso che le serie del numeratore e del denominatore della espressione (2) anzi-

Digitized by Google

Il Borel, per semplicizzare, limitò poi questo concetto col supporre che la serie del denominatore sia la serie corrispondente all'esponenziale e^a, prendendo cioè $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{1}$, $c_2 = \frac{1}{1.2}$, $c_3 = \frac{1}{1.2.3}$, ..., $c_n = \frac{1}{\pi(n)}$, ..., pure tornando poi ancora ad estenderlo alquanto; e questo limite, *quando esista* e *siano soddisfatte certe condizioni speciali,* lo chiamò dap-

---

chè avere per raggio di convergenza l'infinito, abbiano un cerchio di convergenza di raggio finito α e il denominatore col tendere di a ad α cresca indefinitamente, potrebbe ugualmente prendersi come somma della serie data Σu_n la espressione

$$\lim_{a=\alpha-0} \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 a + c_2 s_2 a^2 + \ldots + c_n s_n a^n + \ldots}{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n + \ldots} \text{ o } \lim_{a=\alpha-0} \lim_{n=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 a + c_2 s_2 a^2 + \ldots + c_n s_n a^n}{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n}$$

e così in particolare, prendendo le $c_0, c_1, c_2 \ldots, c_n, \ldots$ tutte uguali ad uno, con che la serie del denominatore si riduce alla progressione $1 + a + a^2 + \ldots$, che ha per cerchio di convergenza quello di raggio 1 e ha per somma $\frac{1}{1-a}$ potrà prendersi per somma della serie Σu_n, il limite

$$\lim_{a=1-0} \frac{s_0 + s_1 a + s_2 a^2 + \ldots + s_n a^n + \ldots}{1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots} = \lim_{a=1-0} \{(1-a)(s_0 + s_1 a + s_2 a^2 + \ldots + s_n a^n + \ldots)\}$$

$$= \lim_{a=1-0} \{u_0 + u_1 a + u_2 a^2 + \ldots + u_n a^n + \ldots\},$$

se le due serie $\Sigma s_n a^n$ e $\Sigma u_n a^n$ avranno un cerchio di convergenza di raggio non inferiore ad uno.

Ora per quanto dicemmo nella nota al § 33, se le medie di Cesàro per la serie Σu_n avranno un limite determinato e finito, le quantità u_n e s_n, se anche cresceranno all'infinito con n, diverranno infinite di un ordine inferiore al primo e quindi le due serie $\Sigma u_n a^n$ e $\Sigma s_n a^n$ avranno certamente un cerchio di convergenza di raggio non inferiore ad uno, mentre al tempo stesso pel teorema di Frobenius il limite della serie $\Sigma u_n a^n$ per $a = 1 - 0$ sarà appunto il limite della media di Cesàro $\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$ per $n = \infty$; quin-

Digitized by Google

prima *somma esponenziale* della serie per finire poi per dirlo semplicemente *somma,* e chiamò le serie corrispondenti *serie sommabili;* e trovò la convenienza della introduzione di questo nuovo concetto di somma della serie nella circostanza certamente notevole — che anzi Egli pose a base della introduzione delle nuove somme — che con esse si mantengono le principali operazioni aritmetiche (somma, prodotto, ecc.) colle loro proprietà, e inoltre studi speciali su quelle nuove espressioni conducono anche a varii risultati notevoli che, quando i termini della serie contengono una o più variabili sono in relazione non solo colla funzione che quelle serie rappresentano nel loro campo di convergenza, ma anche col suo prolungamento fuori di questo campo, come avremo occasione di rilevare fra breve.

40. Ma, lo ripetiamo, mentre devesi da tutti riconoscere che colla introduzione nell'Analisi degli indicati nuovi elementi si può giungere, come effettivamente avviene, a risultati geniali ed importanti anche pei metodi investiga-

---

di si può ora affermare che *le somme di Cesàro per le serie* Σu_n *possono anche considerarsi come il limite per* $a = 1 - 0$ *della espressione*

$$\frac{s_0 + s_1 a + s_2 a^2 + \ldots + s_n a^n + \ldots}{1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots}$$

E poichè, come abbiamo detto, il limite stesso può porsi sotto la forma del doppio limite

$$\lim_{a=1-0} \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 a + s_2 a^2 + \ldots + s_n a^n}{1 + a + a^2 + \ldots + a^n},$$

e questo con una inversione di limiti si riduce appunto al limite della media di Cesàro $\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$, si può anche affermare che quando questa media ha un limite determinato e finito, nel doppio limite precedente è ammissibile l'inversione dei limiti.

Digitized by Google

tivi (da verificarsi poi) ai quali essi danno luogo, non mi pare che si possa arrivare al punto di poter dire che essi valgono alla riabilitazione delle serie divergenti.

Questi nuovi elementi coi quali potrebbero prendersene in considerazione anche altri dello stesso genere e in numero infinito, e ad ognuno dei quali potrebbe quindi al modo stesso attribuirsi il nome di somma della serie, hanno in sè molto di artificioso e di indeterminato e di vago, al punto che a seconda che si parta da uno o da un altro di essi saremmo condotti il più spesso a valori diversi per le quantità che sarebbero considerate come somme di una stessa serie divergente (*); ed è per questo che anche l'introduzione della parola « somma » per indicare questi nuovi elementi non ci pare la più conveniente, come non troviamo del tutto conveniente la introduzione della parola « *serie sommabili* » per indicare quella serie per le quali quegli elementi hanno un significato.

Per le serie, checchè voglia dirsi, parlando di somma saremo sempre naturalmente portati al suo significato classico, come quello che è veramente naturale ed è stato può dirsi consacrato da un uso secolare, e con questo significato rimarranno sempre intatte tutte le obiezioni di Abel e di Cauchy che portano alla proscrizione dall'uso delle serie divergenti nei calcoli.

I nuovi elementi dunque sono pure da introdursi e da studiarsi per la importanza che hanno in sè ma non in re-

---

(*) **Così partendo da una serie, anche numerica, convergente solo condizionatamente, e col cambiare l'ordine dei suoi termini in un modo determinato portandola ad un'altra serie divergente, questa ultima serie — per quanto unica — considerata con elementi diversi e anche soltanto con quelli di Cesàro e di Borel potrebbe dar luogo a più somme diverse fra loro.**

Digitized by Google

lazione alle serie divergenti; e certo meglio sarebbe stato di introdurre per essi altri nomi (*) senza parlare affatto di *somme* o di serie *sommabili* per serie divergenti, e questo anche per non far nascere idee che non corrispondano affatto al vero significato delle parole, mentre somme e serie sommabili nel senso ordinario certamente non sono.

E del resto quegli elementi, e gli studi che per essi si fanno anzichè essere dovuti al fatto che le serie corrispondenti sono divergenti, e senza quindi potersi dire legati alla divergenza di queste — e tanto è vero che possono considerarsi anche quando le serie sono convergenti — sono conseguenza più che delle serie dell'insieme dei termini che le compongono, e delle leggi che servono alla loro formazione; come ad es. anche i criteri generali di convergenza delle serie a termini positivi che abbiamo dati, anzichè come particolarità delle serie divergenti che lá si traggono in campo devono considerarsi come dipendenti dalla particolarità e dalla natura speciale dei termini che le compongono pei quali basta che siano scelti in modo da fare sì che essi costituiscano un insieme di termini la cui somma è infinita (serie divergente).

41. Renderò anche più chiare ed esplicite queste considerazioni colle dichiarazioni seguenti.

Quando una serie è divergente non è più da considerarsi affatto neppure come serie, poichè è più che naturale che alla parola somma debba continuare a darsi il suo or-

(*) A togliere almeno in gran parte gli inconvenienti segnalati pure volendo continuare a ricordare il legame dei nuovi elementi colla serie, questi avrebbero potuto chiamarsi ad esempio « *pseudo-somme della serie* » o *somme generalizzate*, o *somme di Cesàro, di Borel*, ecc.

Digitized by Google

dinario significato secolare che nel caso della divergenza non corrisponde più a nulla.

Allora anzichè come serie possono considerarsi semplicemente come un insieme, un raggruppamento di termini in numero infinito che si succedono con certe leggi e hanno date particolarità: e sebbene questi termini non abbiano la somma intesa nel senso ordinario, può benissimo avvenire che certe loro combinazioni (ma non più i limiti delle loro somme ordinarie che non esistono affatto) abbiano o diano luogo anch'esse a speciali particolarità; ma ciò avviene non in quanto quei termini costituiscono una serie divergente ma in quanto si succedono con quelle leggi.

Gli elementi più generali che introducono Cesàro e Borel, che essi chiamano a mio credere impropriamente somme delle serie anche quando queste sono divergenti e gli altri elementi simili che potrebbero pure introdursi, non sono che speciali combinazioni dei termini di queste serie e possono considerarsi tanto se la serie è divergente quanto se è convergente, e come i termini stessi singolarmente considerati hanno un significato anche quando costituiscono una serie divergente senza che ciò arrechi nessuna meraviglia, così possono avere un significato anche quegli elementi nuovamente introdotti. E come le operazioni di somma, prodotto, quoziente, integrazione, derivazione ecc. fatte sui singoli termini delle serie quando sono convergenti equivalgono spesso, coll'ordinario significato di somma della serie, alle stesse operazioni fatte sulle loro somme e conducono quindi a nuovi risultati, così le stesse operazioni fatte su quei termini quando il loro insieme non fa più una serie convergente possono benissimo portare ad altri insieme di termini pei quali pure quei nuovi elementi possono aversi; e non è neppure escluso che quelle operazioni sui termini delle se-

Digitized by Google

rie possano in fine anche ricondurre a una serie convergente e le stesse operazioni successivamente eseguite su quegli elementi ai quali quegli insiemi di termini danno luogo, possano benissimo condurre a proprietà particolari; e infine nel caso che la serie finale risulti convergente, si potranno avere così quelli stessi risultati giusti che si sarebbero avuti operando sulle serie come se fossero state effettivamente convergenti; ma questo, se può dirsi che metta in evidenza il vantaggio che si ha collo introdurre nell'Analisi quei nuovi elementi, non vuol dire che corrisponda alla riabilitazione delle serie divergenti; chè anzi colla divergenza di queste propriamente quegli elementi non hanno che fare o almeno tanto hanno che fare colla divergenza quanto colla convergenza delle serie (*); e tutt'al più possono valere a spiegare come avvenga che operazioni fatte su serie divergenti conducano spesso a risultati giusti, per giungere così alla ragione che si prefiggeva di trovare Abel di questo fatto.

42. In ogni modo, astraendo ora da queste osservazioni, che noi abbiamo fatto più specialmente per riguardo ai nomi attribuiti ai nuovi elementi che si introducono nell'Analisi e ai legami che per questi vorrebbero stabilirsi

(*) Partendo ad es. da serie trigonometriche che sono divergenti o che essendo convergenti non rappresentano propriamente una funzione ma sono costruite come la ordinaria serie di Fourier o come le altre serie che servono in dati casi alla rappresentazione analitica delle funzioni, col farne la integrazione definita termine a termine come se si trattasse di serie convergenti (e convergenti in ugual grado) le nuove serie rappresentano ordinariamente l'integrale delle funzioni definite fra gli stessi limiti (V. mie lezioni autografate « sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica ecc. » pag. 186-224); ma nessuno ha mai pensato a considerare questo come una riabilitazione di quelle serie divergenti dalle quali si parte, ma solo come cosa dipendente esclusivamente dal modo di composizione dei termini di quelle serie.

Digitized by Google

colle serie divergenti, o per riguardo agli scopi (quelli della riabilitazione delle serie divergenti) pei quali si sarebbero voluti introdurre, e non già per disconoscere l'importanza degli elementi medesimi; noi per fare rilevare fin d'ora esplicitamente questa importanza osserviamo in modo generale che, avendosi una serie i cui termini siano funzioni di una variabile complessa z convergente solo in una parte C del piano z, (come è ad es. la ordinaria serie logaritmica che rappresenta $\log(1+z)$ nel cerchio di raggio uno), se si prenderanno funzioni qualsiasi composte in qualche modo coi termini della serie (anche diverse da quelle di Cesàro e di Borel) che abbiano un significato determinato anche in tutto o in alcune delle altre parti del piano z nel quale la serie è divergente, mentre dove la serie è convergente corrispondono appunto alla vera somma della serie, allora queste funzioni, coincidendo con quella rappresentata dalla serie nei campi dove questa è convergente, fin dove saranno monodrome, finite e continue rappresenteranno il prolungamento analitico della funzione stessa. E usando di tali funzioni che risultino da processi diversi e che conducano a prolungamenti della funzione fuori del campo di convergenza della serie, nei campi *comuni* di prolungamento della funzione i risultati dovranno essere precisamente gli stessi come lo sono nel campo iniziale della convergenza della serie.

Questi risultati sui quali torneremo più diffusamente in seguito, contentandoci per ora di averli solo fugacemente accennati, come gli altri che pure daremo, mettono già in piena evidenza la speciale importanza dei nuovi elementi che si sono introdotti nell'Analisi, e come giovi fare studi su essi; ma questo indipendentemente dalle questioni di convergenza o divergenza delle serie alle quali si vorrebbero riferire col dare a loro il nome di somme di queste serie.

Digitized by Google

Altre considerazioni generali sulle serie.

43. Oltre alle considerazioni generali che abbiamo fatto sulle serie anche quando non sono convergenti, e sulle quali torneremo in seguito, altre di altro genere possono farsene, quali ad es. quelle sulla serie di Stirling e sulle serie asintotiche di Stielties e di Poincaré.

Sono state chiamate serie *semi-convergenti* da Stielties e *serie asintotiche* da Poincaré, ed è il nome di *serie asintotiche* che ha prevalso, certe serie che provengono dalla considerazione di funzioni per valori grandissimi della variabile, e che, per quanto il più spesso siano divergenti, colla somma dei loro primi termini dànno con tutta quella approssimazione che si vuole il valore della funzione pei valori della variabile al di là di certi numeri, i quali crescono però ordinariamente al crescere del numero dei termini che si considerano nella serie, producendosi appunto per questo la divergenza della serie.

44. Queste serie presentano il più spesso la particolarità che fermandosi in esse a un termine qualsivoglia, e prendendo per valore della funzione corrispondente la somma dei termini calcolati della serie, l'errore che si commette quando la variabile è al di là di certi confini è numericamente inferiore all'ultimo termine calcolato della serie e talvolta anche a quello che sarebbe il termine seguente, e quindi è piccolissimo se tali sono questi termini; mentre l'errore cresce quando si prenda un numero maggiore di termini della serie se si conservano gli stessi valori della variabile, e la serie anche il più spesso si presenta divergente; e sono queste particolarità che hanno fermato l'attenzione

Digitized by Google

dei geometri vedendosi in ciò qualche cosa di paradossale e di strano.

E la loro attenzione si fermò specialmente, e prima che per ogni altra, sulla serie detta di *Stirling* che serve a calcolare per valori grandissimi della variabile x il logaritmo della funzione *Euleriana di seconda specie* $\Gamma(x)$, o quello del prodotto $1.2.3. \ldots x$ quando x è intero e grandissimo (*) e poi sulle serie che gli astronomi (limitandosi però a servirsi soltanto dei loro primi termini) hanno sempre impiegato e tuttora impiegano pei loro calcoli, senza neppure pensare che fossero divergenti, come fu fatto rilevare per la prima volta da Poincaré nel vol. II della sua classica opera « *Les Méthodes de la Mécanique céleste* » il quale però rilevò pure al tempo stesso e spiegò come nei limiti nei quali vengono usate dagli astronomi i risultati che ottengono debbono riguardarsi come esatti.

45. Ma francamente, a dire il vero, non vi è affatto da meravigliarsi di questo, nè alcun paradosso vi è.

Nessuno ormai più si meraviglia del fatto che per molte funzioni la serie di Taylor è divergente, o anche i suoi ter-

---

(*) La funzione $\Gamma(x)$ per x reale e positivo è definita dalla formula

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$$

che nel caso di x intero con integrazioni per parti successive dà

$$\Gamma(x) = 1.2.3 \ldots (x-1).$$

La funzione Euleriana di 1. specie $B(a.b)$ è l'altra (Analisi infinitesimale 2.° volume pag. 395)

$$B(ab) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Digitized by Google

mini da un certo punto in poi perdono ogni significato; e pure anche per questa serie la somma di un numero qualsiasi dei primi termini presi successivamente, dà, entro confini che variano in relazione al numero dei termini che si considerano, un valore approssimato quanto si vuole della funzione e anche con un errore minore in valore assoluto dell'ultimo termine (diverso da zero) calcolato; e le considerazioni fatte al § 175, pag. 103 del primo volume delle mie « *Lezioni di analisi infinitesimale* » spiegano all'evidenza come questo avvenga nè danno luogo ad alcuna meraviglia.

Così pure per la serie di Stirling la cosa è spiegata all'evidenza dalla considerazione esposta alle pagg. 308-309, 379-80-81 e 410-411 del Vol. II delle dette mie « *Lezioni di Analisi infinitesimale* » dalle quali risulta chiaramente che il prefiggersi di svolgere $\log \Gamma(x)$, all'infuori di un termine in $\log x$ e di uno di primo grado in x, in serie convergente per le potenze della inversa $\frac{1}{x}$ della variabile x, è prefiggersi una cosa impossibile. Un problema come questo, di avere cioè *una vera serie* in potenze di $\frac{1}{x}$ che conduca al valore della funzione $\log \Gamma(x)$ propriamente neppure dovrebbe essere posto, e invece pure incominciando lo sviluppo, per avere formole giuste bisognerebbe poi sempre, come si fa nel caso della formola di Taylor, contentarsi di *arrestarlo a un certo punto* (qualsiasi) *aggiungendo poi sempre un termine complementare.* E difatti in sostanza anche la serie di Stirling col cambiarvi $\frac{1}{x}$ in ξ diviene formalmente una serie di Taylor attorno al punto $\xi = 0$, e i termini che in esso allora successivamente si calcolano hanno proprietà speciali; ma per dare il valore perfettamente giusto della funzione occorre non completarli colla serie che non ha alcun

Digitized by Google

significato, ma col termine complementare corrispondente; e solo quando ci si contenti di avere un valore approssimato della funzione si potrà anche fare a meno del termine complementare quando i valori della variabile sono al di là di un certo numero (variabile col termine al quale ci si arresta) perchè allora il termine complementare risulterà piccolissimo.

E lo stesso precisamente deve dirsi per le serie che si presentano nella Meccanica celeste per le quali come in quelle di Taylor suindicate e di Stirling che come serie non hanno alcun significato — anche un leggiero esame della funzione che si tratta di sviluppare mostra che lo sviluppo come serie in quel dato modo non è affatto possibile (*), e solo diviene possibile e rigoroso quando ci si arresti a qualsiasi punto e si aggiunga il detto termine complementare che nei casi appunto della Meccanica celeste diviene piccolissimo e fa sì che la somma dei termini calcolati dà appunto il valore della funzione colla voluta approssimazione, e rende quindi giustissimi i calcoli che si fanno entro i richiesti limiti di approssimazione.

(*) Poincaré nel Vol. II dei ricordati suoi « Méthodes .. », a pag. 3 considera in primo luogo la funzione $\varphi(w, \mu)$ rappresentata dalla serie $\sum \frac{w^n}{1 \quad n\mu}$ che per $\mu > 0$ e $|\text{mod } w| < 1$ ha sempre un significato, e cercandone lo sviluppo in serie ordinata per le potenze intere e positive di μ, dimostra con uno speciale procedimento che la serie risulta divergente, talchè lo sviluppo *come serie* non può ammettersi affatto. Questo del resto, anche senza il procedimento di Poincaré, risulta subito anche dall'osservare che se un tale sviluppo per le potenze di μ fosse possibile, esso sarebbe uno sviluppo di Taylor, e la funzione data, come funzione di μ, dovrebbe mantenersi monodroma finita e continua per tutti i valori di di μ entro un certo cerchio descritto intorno all'origine, mentre essa diviene infinita nei

Digitized by Google

46. Per queste considerazioni adunque la cosa non può dirsi affatto una particolarità paradossale delle dette serie le quali, come serie, non dovrebbero neppure considerarsi affatto, almeno finchè delle serie e della loro somma si conservano la definizione e il significato ordinario. Che se poi definizione delle serie e significato della loro somma si cambiano, e il cambiamento si fa in modo da riportarci appunto alla funzione per la quale si pretende di dare quegli sviluppi, la cosa naturalmente prende un aspetto tutto diverso; ma allora non può disconoscersi che tutto diviene un qualche cosa di artificioso e di arbitrario che male si accorda con quei risultati e procedimenti fondamentali che possono dirsi il cardine della Scienza.

47. Si costruiscano dunque pure *formalmente* e fino a quel punto (qualsiasi) che si vorrà, i termini successivi delle serie suindicate anche per le funzioni per le quali queste serie risulterebbero prive di significato, come, se si vuole, si possono costruire quelli delle serie di Taylor anche quando queste serie non sono applicabili; e in dati casi le somme dei termini che successivamente si calcoleranno, pei valori della variabile entro certi confini che varieranno col numero dei termini che si prenderanno potranno — anche quando la serie risulti divergente — servire al calcolo approssimato della funzione corrispondente; ma questo non si consideri

---

punti $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots$, e ha quindi un punto singolare essenziale nell'origine.

Ma mentre lo sviluppo di $\varphi(w, \mu)$ *come serie* di potenze intere e positive di μ non è possibile, arrestandolo però a un certo punto (qualsiasi) dà con tutta l'approssimazione che si vuole il valore della funzione che si sviluppa $\varphi(w, \mu)$ finchè μ si mantiene entro certi confini che variano a seconda del termine al quale vi si arresta.

Digitized by Google

affatto come una particolarità delle serie stesse, le quali invece *come serie* colla definizione e significato ordinario non avranno alcun senso, e di esse non sarebbe neppure il caso di parlare. E come ormai non si parla più di serie del Taylor quando questa non è applicabile e allora si parla solo di *Formula del Taylor abbreviata,* così invece di dire *serie* di Stirling, *serie* asintotiche, o *serie* della Meccanica celeste, meglio a scanso di equivoci e per essere precisi, sarebbe stato dire *Formola di Stirling, Formole asintotiche* e *Formole della Meccanica celeste,* sottintendendo sempre che queste formole debbano essere arrestate a un certo punto (qualsiasi) e portare il corrispondente termine complementare che vale a renderle perfettamente rigorose, quando questo, per l'approssimazione che ci si contenta di avere non risulti trascurabile. E allora non parlando di serie anche ogni idea di paradosso sarebbe scomparsa naturalmente e neppure ci si sarebbe pensato, poichè ciò che è apparso un paradosso sarebbe apparso invece, come effettivamente è, una particolarità notevole e non altro di quelle formole che non ha nulla di paradossale in sè.

Serie di Stirling.

48. Esposte queste generalità, noi dovremmo parlare delle serie asintotiche, ma prima vogliamo fermarci un momento sulla serie di Stirling alla quale accennammo sopra, anche per mostrare, con una osservazione molto semplice e notevole fatta da Cauchy, come avvenga che l'errore che si commette fermandosi a un certo punto (qualsiasi) è numericamente inferiore all'ultimo termine calcolato e anche a quello che verrebbe dopo se il calcolo venisse continuato.

Digitized by Google

La serie di Stirling serve, come abbiamo detto, per calcolare il valore approssimato del logaritmo della funzione Euleriana di 2.ª specie $\Gamma(x)$ la quale è definita per i valori diversi da zero e positivi della variabile x dalla formola

$$1) \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz,$$

e per $\log \Gamma(x)$ si ha l'altra (V. mie lez. di analisi infinites. vol. II form. (13) della pag. 403)

$$2) \qquad \log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left\{ (x-1) e^{-z} - \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{1-e^{-z}} \right\} \frac{dz}{z},$$

la quale coll'aggiungere e togliere entro la parentesi che è sotto l'integrale la quantità $\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-xz} + \frac{e^{-xz} - 1}{z}$ si trasforma nella seguente

$$\log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(e^{-z} - e^{-xz}\right) - \frac{1}{2} e^{-z} - \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} + \frac{1}{z} + x e^{-xz} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-xz} - 1}{z} + \left\{ \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right\} e^{-xz} \right] \frac{dz}{z},$$

ovvero

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz + \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{2} e^{-z} - \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} + \frac{1}{z} \right\} \frac{dz}{z} +$$
$$+ x \int_0^\infty \left\{ e^{-xz} + \frac{e^{-xz} - 1}{xz} \right\} \frac{dz}{z} + \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right\} e^{-xz} \frac{dz}{z},$$

perchè collo sviluppare in serie e^{-z} e e^{-xz} nell'intorno del punto $z = 0$ si vede che i quattro integrali nei quali abbiamo spezzato il 2.° membro di $\log \Gamma(x)$ hanno tutti un significato; e poichè pel primo integrale si ha (Lez. An. inf. Vol. II, pag. 232 form. 48) $\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz = \log x$ e il se-

Digitized by Google

condo è già indipendente da x, e lo stesso è del terzo perchè col cambiarvi xz in t si trasforma nell'altro

$$\int_0^\infty \left(e^{-t} + \frac{e^{-t}-1}{t}\right)\frac{dt}{t},$$

si ottiene la formola seguente

$$3)\quad \log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x + Ax + B + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right)e^{-xz}\frac{dz}{z},$$

essendo

$$A = \int_0^\infty \left(e^{-z} - \frac{e^{-z}-1}{z}\right)\frac{dz}{z^2}, \quad B = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}e^{-z} - \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} + \frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}$$

e si potrebbe dimostrare che $A = -1$, $B = \frac{1}{2}\log 2\pi$; talchè può dirsi che la parte che resta a calcolarsi in $\log\Gamma(x)$ è l'integrale $\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right)e^{-xz}\frac{dz}{z}$ che indicheremo con $g(x)$.

49. Ciò posto, si osservi che valendosi della formola

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{2z}{z^2 - v^2},$$

che si dà per lo sviluppo di $\cot\pi z$ nella teoria delle funzioni di variabile complessa e cambiandovi poi z in $\frac{iz}{2\pi}$ dopo avere osservato che

$$\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} - \frac{1}{z} = \frac{i}{2}\cot\frac{iz}{2} - \frac{1}{z},$$

o anche seguendo il processo che abbiamo dato al § 227

Digitized by Google

(pag. 344 e seg.) del Vol. II delle ricordate mie lezioni di Analisi infinitesimale, si trova che

$$4) \qquad \frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}=2z\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2},$$

e se ne deduce quindi che

$$5) \quad \log\Gamma(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+Ax+B+2\int_0^{\infty}\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}\right)e^{-xz}dz,$$

e di qui si vede che se si potesse sviluppare la funzione $2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$ in serie ordinata per le potenze intere e positive di z *per tutti i valori di* z da 0 a ∞, anche l'ultimo termine di $\log\Gamma(x)$ col cambiarvi sotto l'integrale zx in z si potrebbe avere sviluppato per le potenze intere e negative di x.

Evidentemente però poichè la detta serie diventa infinita nei punti $2\pi i$, $4\pi i$, $6\pi i$, ... $\left(\text{come lo diventa}\frac{1}{1-e^{-z}}\right)$, lo sviluppo della detta funzione $2\sum\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$ in serie ordinata per le potenze intere e positive di z non sarà possibile per tutti i valori di z, ma lo sarà solo quando sia $|\text{mod}\, z|<2\pi$, cioè essendo nel caso nostro z reale e positivo, quando z sia compreso fra 0 e 2π e allora sarà lo sviluppo di Taylor ordinario; e per gli altri valori di z che pure figurano nella formola (5) potremo valerci ancora dello stesso sviluppo ma solo arrestandolo ad un termine qualsiasi ed aggiungendovi un termine complementare.

50. Questo sviluppo dunque arrestato a un termine qualsiasi potrà intanto ottenersi colla formola di Maclaurin calcolando le derivate della funzione $\frac{1}{z(1-e^{-z})}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}$ per

Digitized by Google

$z = 0$ e dividendole pei soliti fattoriali, ciò che mostra intanto che i cofficienti dello sviluppo verranno ad essere tutti numeri razionali.

D'altra parte poichè ogni termine della serie $\sum \frac{1}{z^2 + 4n^2\pi^2}$, può scriversi sotto la forma $\frac{1}{4n^2\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}}$, esso quando sia mod $z < 2n\pi$ si svilupperà secondo la progressione

$$\frac{1}{4n^2\pi^2} - \frac{z^2}{(4n^2\pi^2)^2} + \frac{z^4}{(4n^2\pi^2)^3} - \ldots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{(4n^2\pi^2)^{p+1}} + \\ + (-1)^{p+1} \frac{z^{2(p+1)}}{(4n^2\pi^2)^{p+2}} + \ldots$$

e per applicare questo sviluppo anche al primo termine $\frac{1}{z^2 + 4\pi^2}$ bisognerebbe che fosse sempre mod $z < 2\pi$; quindi volendo considerare il termine stesso non solo quando z è compreso fra 0 e 2π ma per qualunque valore positivo di z (come pure bisognerà fare perchè figuri sotto un integrale esteso da 0 a ∞) dovremo scriverli sempre (per ogni valore di n) sotto la forma abbreviata

$$\frac{1}{4n^2\pi^2} - \frac{z^2}{(4n^2\pi^2)^2} + \frac{z^4}{(4n^2\pi^2)^3} - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{z^{2(p-1)}}{(4n^2\pi^2)^p} + (-1)^p \theta_{n,p},$$

essendo $(-1)^p \theta_{n,p}$ il termine complementare; e questo termine complementare per quanto risulta dallo sviluppo delle progressioni arrestate a un certo punto, sarà evidentemente

$$(-1)^p \frac{z^{2p}}{(4n^2\pi^2)^{p+1}} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}} \quad \text{ovvero} \quad (-1)^p \frac{z^{2(p-1)}}{(4n^2\pi^2)^p} \frac{z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$$

ciò che porta che sarà inferiore in valore assoluto tanto all'ultimo termine calcolato $(-1)^{p-1} \frac{z^{2(p-1)}}{(4n^2\pi^2)^p}$ quanto a quello

Digitized by Google

$(-1)^p \frac{z^{2p}}{(4n^2\pi^2)^{p+1}}$ che sarebbe il termine seguente (*); quindi per lo sviluppo abbreviato di $2\sum \frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$ avremo anche l'altra

$$2\sum_1^\infty \frac{1}{z^2+4n^2\pi^2} = \sum_1^\infty \left(\frac{2}{4n^2\pi^2} - \frac{2z^2}{(4n^2\pi^2)^2} + \frac{2z^4}{(4n^2\pi^2)^3} - \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{p-1} \frac{2z^{2(p-1)}}{(4n^2\pi^2)^p} + (-1)^p 2\theta_{n,p} \right),$$

ovvero, essendo p un numero intero qualsiasi ma finito e fisso,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{z^2+4n^2\pi^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{4n^2\pi^2} - z^2 \sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2\pi^2)^2} + z^4 \sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2\pi^2)^3} + \ldots +$$

$$+ (-1)^p z^{2p} \sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2\pi^2)^{p+1}} + (-1)^{p+1} \sum_1^\infty \theta_{n,p},$$

(*) Cauchy osservò in modo generale che per una progressione qualsiasi a ragione negativa $-a$, o meglio per lo sviluppo del quoziente $\frac{1}{a+y}$ per potenze intere e positive di y arrestate a un certo punto si ha:

$$\frac{1}{a+y} = \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} + \frac{y^2}{a^3} - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{y^{p-1}}{a^p} + \theta_p$$

con $\theta_p = (-1)^p \frac{y^p}{a^{p+1}} \frac{1}{1+\frac{y}{a}} = (-1)^p \frac{y^{p-1}}{a^p} \frac{y}{a+y}$; e ne concluse quindi in modo generale che l'errore θ_p che si commette arrestandosi al termine p^0 è sempre numericamente inferiore tanto al valore assoluto $\frac{y^{p-1}}{a^p}$ dell'ultimo termine calcolato, quanto al valore assoluto $\frac{y^p}{a^{p+1}}$ di quello che sarebbe il termine seguente, e il segno è sempre quello di $(-1)^p$; e lo stesso quindi accade anche per le somme di un numero qualunque finito o infinito di queste progressioni moltiplicate per quantità positive.

Digitized by Google

e ponendo in generale

$$6) \qquad B_p = \frac{2\pi(2p)}{(2\pi)^{2p}}\left(1+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{4^{2p}}+\ldots.\right)$$

avremo la formola perfettamente rigorosa

$$7) \qquad 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2} = \frac{B_1}{\pi(2)} - \frac{B_2}{\pi(4)}z^2 + \frac{B_3}{\pi(6)}z^4 - \ldots + \\ + (-1)^{p-1}\frac{B_p z^{2(p-1)}}{\pi(2p)} + \theta_p$$

essendo θ_p il termine complementare che per quanto abbiamo detto avrà il segno di $(-1)^p$ e sarà numericamente inferiore tanto al termine $\frac{B_p}{\pi(2p)}z^{2(p-1)}$, ultimo calcolato, quanto a quello $\frac{B_{p+1}}{\pi[2(p+1)]}z^{2p}$ che sarebbe il termine seguente quando lo sviluppo si continuasse.

Sostituendo quindi il valore scritto sopra di $\log\Gamma(x)$ coll'osservare in modo generale che si ha

$$\int_0^\infty z^{2k}e^{-xz}dz = \frac{1}{x^{2k+1}}\int_0^\infty t^{2k}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(2k+1)}{x^{2k+1}} = \frac{\pi(2k)}{x^{2k+1}}$$

si trova la formola seguente

$$8) \qquad g(x) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)2p}\frac{1}{x^{2p-1}} + \bar{\theta}_p,$$

e quindi

$$9) \qquad \log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x + Ax + B + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \\ + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)2p}\frac{1}{x^{2p-1}} + \bar{\theta}_p$$

Digitized by Google

essendo $\overline{\theta}_p$ il termine complementare nella formola attuale cioè $\overline{\theta}_p = \int_0^{\infty} \theta_p e^{-xz} dz$; e di qui osservando che θ_p ha sempre il segno di $(-1)^p$ ed è inferiore in valore assoluto tanto a $\frac{B_p}{\pi(2p)} z^{2(p-1)}$ quanto a $\frac{B^{p+1}}{\pi[2(p+1)]} z^{2p}$, si vede subito che il detto termine complementare avrà il segno di $(-1)^p$ e sarà numericamente inferiore tanto all'ultimo termine scritto $\frac{B_p}{(2p-1)2p} \frac{1}{x^{2p-1}}$ quanto al termine seguente che si avrebbe se la formola si continuasse ancora; per modo che quando questi termini pei valori che si considerano di x siano piccolissimi e inferiori a σ in valore assoluto, arrestandosi all'ultimo termine scritto e trascurando il termine complementare $\overline{\theta}_p$, si avrà il valore di $\log \Gamma(x)$ con un grado di approssimazione superiore a σ.

51. Le formole (8) e (9) che abbiamo trovate sono quelle che cercavamo e sono pienamente rigorose. Potendo dimostrarsi come abbiamo detto che $A = -1$ e $B = \frac{1}{2} \log 2\pi$ si vede che la (9) combina perfettamente colla formola (35) della pag. 410 del Vol. II delle mie Lezioni di Analisi infinitesimale.

Tralasciando nelle formole stesse (8) o (9) il termine complementare $\overline{\theta}_p$, e intendendo che il secondo membro si continui indefinitamente, questo diviene una serie che nella parte che corrisponde a $g(x)$ è appunto la serie di Stirling. Come serie però non ha alcun significato e non può prendersi affatto per rappresentare $\log \Gamma(x)$ e neppure può considerarsi, perchè non solo essa è divergente per qualunque valore finito di x, ma i suoi termini crescono all'infinito al crescere di p, come si vede subito coll'osservare

Digitized by Google

che il rapporto fra due suoi termini consecutivi è in valore assoluto $\frac{B_{p+1}}{B_p} \frac{(2p-1)2p}{(2p+1)(2p+2)} \frac{1}{x^2}$ e per la (6) si riduce a:

$$\frac{1+\frac{1}{2^{2(p+1)}}+\frac{1}{3^{2(p+1)}}+\cdots}{1+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\cdots} \frac{(2p-1)2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{x^2}$$

e cresce quindi all'infinito col crescere di p,

In quanto però si abbia riguardo alla formazione e successione dei suoi termini, questa serie arrestata a un termine qualsiasi ha la particolarità notevolissima alla quale più volte accennammo, quella cioè che con essa, prendendo come valori di $g(x)$ o di $\log \Gamma(x)$ le somme che allora si ottengono dalla (8) o dalla (9), l'errore che si commette è numericamente inferiore tanto all'ultimo termine calcolato della serie quanto al termine seguente: e quindi quando x è tanto grande che questi termini sono così piccoli da potersi trascurare, le somme stesse vengono a darci i valori di $g(x)$ o di $\log \Gamma(x)$ con tutto quel grado di approssimazione che si vuole.

52 I numeri B_p che abbiamo introdotti colla formola (6) sono conosciuti sotto il nome di *numeri di Bernouilli* (Jacopo) che li introdusse nell'Analisi studiando le somme delle potenze simili dei numeri interi (V. mie Lez. Analisi infinit. Vol. II § 221 a pag. 338 e a pag. 349 in nota). Questi numeri colla formola (6) si presentano sotto una forma complicata con quantità incommensurabili; però se si osserva che, come già dicemmo, i termini dello sviluppo (7) della funzione $2\sum_1^\infty \frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$ possono ottenersi anche scrivendo lo sviluppo di Maclaurin per la funzione

Digitized by Google

$\frac{1}{z(1-e^{-z})} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z}$, cioè calcolando le derivate di questa funzione per $z = 0$ e dividendole pei soliti fattoriali si vede subito che i detti numeri, potendo tutti ottenersi con semplici derivazioni della funzione qui indicata per $z = 0$ e con divisioni per fattoriali, si presentano tutti sotto forma razionale, ciò che porta immediatamente a dire che sono incommensurabili le somme delle serie

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \ldots.$$

per tutti i valori interi e positivi di p e la incommensurabilitá è quella di $(2\pi)^{2p}$.

Pei primi numeri di Bernoulli $B_1, B_2, B_3 \ldots$, calcolandoli colla formola di Maclaurin come abbiamo detto, si trovano i valori seguenti

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, \ldots.$$

e poichè, indicando con S_{2p} la somma delle serie

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \ldots.,$$

la (6) ci dà la formola seguente

$$\frac{B_p}{\pi(2p)} = \frac{2S_{2p}}{(2\pi)^{2p}}$$

quale fu data da Eulero, se ne deducono le altre particolari

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad S_6 = \frac{\pi^6}{945}, \ldots.$$

Serie asintotiche

53. Passando ora a trattare delle serie asintotiche studiate da Stielties e da Poincaré, diciamo prima di tutto in modo generale che dovendo queste serie servire a dare va-

Digitized by Google

lori approssimati di speciali funzioni per valori grandissimi della variabile come la serie di Stirling, e dovendo procedere per potenze intere e positive di $\frac{1}{x}$, s'intende subito che non potranno essere serie convergenti altro che quando la funzione corrispondente considerata anche per valori complessi della variabile si mantenga uniforme anche all'infinito, perchè mutando $\frac{1}{x}$ in t la serie stessa si muta in una serie ordinata per le potenze intere e positive di t attorno al punto $t = 0$ e corrisponde quindi a una serie di Mac-laurin ordinaria.

Il più spesso dunque le dette serie saranno divergenti, e volendo servirsene per giungere con esse in modo perfettamente rigoroso a risultati sicuramente giusti, anzichè prenderle come serie bisognerà sempre arrestarle a un certo punto (qualsivoglia) e aggiungere il termine complementare corrispondente, salvo quei casi speciali nei quali speciali studî *assicureranno* che anche usandole come serie conducono a risultati giusti, perchè i termini complementari che via via dovrebbero introdursi, nelle combinazioni fra loro e colle altre parti delle formole si elidono fra loro o dànno luogo nel loro insieme ad altri termini complementari che tendono sempre a zero al crescere indefinito del numero dei termini che si prendono nelle serie, ottenendosi quindi che le serie cui allora conducono risultano convergenti; per modo da poter dire in questi casi che gli errori che si commettono coll'arrestarsi a qualsiasi termine nelle varie serie e col trascurarvi i termini complementari finiscono per compensarsi completamente; o anche a meno che, giunti coll'uso di quelle serie a certi risultati dei quali non si possa quindi esser sicuri, si verifichi per altra via la esattezza dei risultati medesimi.

Digitized by Google

Fuori di questi casi, scritte *formalmente* le dette serie, potrà ancora giovare di tenerne conto, perchè — come nel caso della serie di Stirling — potranno considerarsi non le serie intiere ma parti finite di esse arrestandosi a un termine qualsiasi per avere da queste valori approssimati della funzione corrispondente quando la variabile è al di là di certi confini che variano al variare del termine al quale ci si arresta, perchè allora il termine complementare viene ad essere di un grado di piccolezza corrispondente all'approssimazione voluta; ed in vista di questa può essere utile di considerarle e fare su esse senz'altro operazioni di calcolo, quando sia dimostrato che queste operazioni conducono ad altre serie che si trovano negli stessi casi.

54. Ciò posto prendiamo a considerare una funzione reale $F(x)$ della variabile reale x che col crescere indefinito di x abbia per limite una costante C_0.

Questo valore C_0 sarà già un valore approssimato di $F(x)$ per valori grandissimi di x, e la differenza $\varepsilon_0 = F(x) - C_0$ tenderà a zero al crescere indefinito di x, e da un certo valore x_0 di x in poi sarà sempre numericamente minore di σ, essendo σ un numero positivo arbitrariamente piccolo dato.

Se questa differenza $F(x) - C_0$ al crescere indefinito di x tenderà a zero almeno del prim'ordine, per modo che moltiplicata per x abbia essa pure un limite determinato C_1, che potrà anche essere lo zero, allora la espressione

$$\varepsilon_1 = \left| F(x) - C_0 \right| x - C_1 = \left(F(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} \right) x$$

finirà per divenire essa pure piccola quanto si vuole e si avrà $F(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{\varepsilon_1}{x}$, e $\frac{\varepsilon_1}{x}$ sarà di un ordine di piccolezza superiore a quella di $\frac{1}{x}$; ma l'impiccolimento di

Digitized by Google

questa quantità $\frac{\varepsilon_1}{x}$ potrà essere meno rapido di quello che fosse per la differenza $F(x) - C_0$, cioè questa quantità $\frac{\varepsilon_1}{x} = F(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}$ potrà incominciare ad essere e mantenersi numericamente inferiore a σ solo pei valori di x al di là di un certo numero x_1 superiore a quello x_0 dopo il quale era numericamente inferiore a σ la differenza precedente $F(x) - C_0$.

Similmente, se moltiplicando ancora per x la espressione precedente di ε_1 o per x^2 la differenza $F(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}$ si troverà che al crescere indefinito di x il prodotto corrispondente $\left\{F(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}\right\} x^2$ tenderá verso un limite determinato C_2, la espressione

$$\varepsilon_2 = \left\{F(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}\right\} x^2 - C_2 = \left\{F(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} - \frac{C_2}{x^2}\right\} x^2$$

tenderà a zero e si avrà $F(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{\varepsilon_2}{x^2}$ ed $\frac{\varepsilon_2}{x^2}$ sarà di un ordine di piccolezza superiore a quello di $\frac{1}{x^2}$, ma la quantità stessa $\frac{\varepsilon_2}{x^2}$ potrà incominciare ad essere e mantenersi numericamente inferiore a σ solo al di là di un certo numero x_2 superiore ai due numeri precedenti x_0 ed x_1.

Così continuando si potrà giungere alla formola

$$(1) \qquad F(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

dove ε_n tenderà a zero al crescere indefinito di x; e al successivo verificarsi delle condizioni che via via si ponevano potranno calcolarsi termini simili per $F(x)$ quanti se ne vorranno, e le successive quantità ε_n continueranno sempre

Digitized by Google

a tendere a zero; ma potrà darsi che i numeri $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ successivamente determinati, al di là dei quali le $\varepsilon_0, \frac{\varepsilon_1}{x}, \frac{\varepsilon_2}{x^2}, \ldots$ $\ldots, \frac{\varepsilon_n}{x^n}$ diverranno numericamente inferiori a σ *vadano crescendo indefinitivamente* con n, e allora la formola precedente varrà certamente sempre e rigorosamente a qualunque punto ci si arresti quando si conservi il termine complementare $\frac{\varepsilon_n}{x^n}$, e quando tralasciando questo termine complementare ci si arresti a un termine qualunque $\frac{C_n}{x^n}$, essa potrà servire a darci un valore approssimato più di σ per $F(x)$ pei valori di x al di là del numero x_n (crescente indefinitivamente con n) e varrà anche a darci per $F(x)$ un valore più approssimato dell'ultimo termine calcolato $\frac{C_n}{x^n}$; (supposto naturalmente diverso da zero) per valori di x al di là di un certo numero $\bar{x}_n$; ma in questi casi quando al secondo membro si voglia sostituire la serie

$$(2) \qquad C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots\ldots$$

in questo caso in cui le quantità testè indicate con x_n crescono indefinitivamente con n, la formola non varrà più affatto per nessun valore di x e questa serie non sarà convergente e non avrà nessun significato.

Invece, affinchè la formola possa valere anche sostituendo al secondo membro questa serie, bisognerà che i numeri sopra indicati con $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$ non passino mai un certo confine, nel qual caso la serie stessa risulterà convergente pei valori di x al di là di un certo numero determinato $\bar{x}$; perchè allora i termini complementari $\frac{\varepsilon_n}{x^n}$ saranno i

Digitized by Google

veri resti della serie e tenderanno a zero in modo *uniforme* per tutti i detti valori di x. E basterà che sia convergente per un valore speciale ξ di x per essere sicuri che tale sarà anche pei valori maggiori di ξ; e allora essa sarà anche convergente in egual grado pei valori di x che sono superiori a ξ perchè in sostanza verrà a essere una serie ordinata per le potenze intere e positive della variabile $t=\frac{1}{x}$ col cerchio di convergenza di raggio non inferiore a $\frac{1}{\xi}$ e convergente su questo cerchio di raggio $\frac{1}{\xi}$.

55. Le serie (2) qui considerate, divergenti o no, sono le serie che ora con Poincaré si chiamano *asintotiche,* e che Stielties, che le considerò pel primo e le introdusse nel modo sopra indicato, chiamò *semi-convergenti* avendo riguardo alla circostanza che arrestate a un termine qualsiasi, conducono al valore della funzione corrispondente con quel grado di approssimazione che si vuole, pei valori di x al di là di un certo numero (variabile ordinariamente col termine al quale ci si arresta) mentre come serie sono ordinariamente divergenti. Di queste serie poi Stielties chiamò di *prima specie* quelle i cui termini, come nel caso della serie di Stirting, si succedono con segni alternati, e chiamò di *seconda specie* le altre, e fece studi speciali e importanti sulle une e sulle altre in una memoria pubblicata negli Annales de l'École normale 1886 col titolo *Récherches sur quelques sèries semi-convergentes.*

56. Poincaré invece, senza fermarsi sul processo di Stelties sopra indicato per la costruzione di queste serie, prese senz'altro a considerare una serie

$$C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{C_n}{x^n}+\ldots.$$

Digitized by Google

convergente o no; e quando per questa serie esista una funzione $I(x)$ per la quale si abbia la particolarità che arrestandosi nella serie a un termine qualunque $\frac{C_n}{x^n}$ la differenza fra $I(x)$ e la somma $C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{x^n}$ dei termini delle serie fino al detto punto finisca per essere di un ordine di piccolezza superiore a quello di $\frac{1}{x^n}$, per modo ciò che si abbia

$$I(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

essendo ε_n una quantità che tende a zero col crescere indefinito di x quando si tiene fermo n, chiamò la detta serie *serie asintotica della funzione corrispondente* $I(x)$.

E poichè in queste serie comunque ottenute e corrispondenti ad una funzione $I(x)$, i coefficienti vengono determinati e in un sol modo col processo precedente di Stielties, si vede subito che *quando per una determinata funzione* $I(x)$ *si ha uno sviluppo asintotico questo è unico;* ma non si può dire inversamente che uno sviluppo asintotico trovato per una certa funzione $I(x)$ corrisponda soltanto a questa funzione; perchè considerando ad es. la funzione e^{-x} o anche l'altro più generale e^{-x^k} dove k è un numero positivo qualsiasi, col processo di Stielties si vede subito che il suo sviluppo asintotico è zero, e quindi lo sviluppo asintotico trovato per $I(x)$ lo è pure anche per infinite altre funzioni e in particolare per tutte le funzioni $I(x) \pm A \cdot e^{-x^k}$ dove A e k sono numeri diversi da zero e positivi qualunque.

Così dunque dato uno sviluppo che debba essere asintotico o non corrisponderà a nessuna funzione determinata, o corrisponderà a finiinte funzioni; e in questo ultimo caso

Digitized by Google

perchè venga a corrispondere ad un'unica funzione bisognerà porre altre condizioni.

57. Per le serie asintotiche è notevole ed è al tempo stesso di particolare importanza il fatto rilevato da Poincarè, che su esse possono eseguirsi le ordinarie operazioni di addizione (o sottrazione), moltiplicazione, divisione (sotto la condizione che il denominatore non si annulli all'infinito) e integrazione come sulle serie convergenti ordinarie, giungendo così alle serie asintotiche relative alla somma (o sottrazione), prodotto, quoziente, o integrale delle funzioni corrispondenti alla serie primitiva. E se la serie finale risulterà convergente, ne verrà che le operazioni fatte sulle serie asintotiche, anche se divergenti, in questo caso condurranno a risultati esatti, perchè questo vorrá dire che, fatti i calcoli rigorosamente coll'aggiunta dei termini complementari successivamente necessarii, questi in ultimo daranno luogo ad un termine complementare che sarà zero, o tenderà a zero al crescere indefinito di n e si avranno quindi quegli stessi risultati che si sarebbero avuti facendo i calcoli sulle serie divergenti medesime come se fossero state convergenti, salvo in certi casi la presenza di una funzione che abbia per serie asintotica lo zero.

59. La dimostrazione di questa particolarità delle serie asintotiche si fa nel modo seguente:

Considerando dapprima il caso della somma o differenza per due funzioni $I(x)$ e $I_1(x)$ per le quali si abbiano le due serie asintotiche

$$3) \qquad C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \dots$$

$$4) \qquad C_0' + \frac{C_1'}{x} + \frac{C_2'}{x^2} + \dots + \frac{C_n'}{x^n} + \dots$$

Digitized by Google

osserviamo che avendosi rigorosamente

$$5) \qquad I(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

$$6) \qquad I_1(x) = C_0' + \frac{C_1'}{x} + \frac{C_2'}{x^2} + \ldots + \frac{C_n'}{x^n} + \frac{\varepsilon_n'}{x^n},$$

se ne dedurrà subito la formola seguente

$$I(x) \pm I_1(x) = C_0 \pm C_0' + \frac{C_1 \pm C_1'}{x} + \frac{C_2 \pm C_2'}{x^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{C_n \pm C_n'}{x^n} + \frac{\varepsilon_n \pm \varepsilon_n'}{x^n}$$

la quale permette appunto di dire che la serie somma o differenza delle due serie asintotiche (3) e (4) relative alle funzioni $I(x)$ e $I_1(x)$ è appunto quella asintotica della somma o differenza di queste funzioni.

60. Pel caso poi del prodotto, osservando che le formole rigorose (5) e (6) dànno luogo all'altra pure perfettamente rigorosa

$$I(x)\, I_1(x) = C_0 C_0' + \frac{C_0 C_1' + C_1 C_0'}{x} + \frac{C_0 C_2' + C_1 C'_1 + C_2 C_0'}{x^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{C_0 C_n' + C_1 C'_{n-1} + \ldots + C_n C_0'}{x^n} +$$
$$+ \frac{\left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n}\right)\varepsilon_n' + \left(C_0' + \frac{C_1'}{x} + \frac{C_2'}{x^2} + \ldots + \frac{C_n'}{x^n}\right)\varepsilon_n}{x^n};$$

e in questa il numeratore dell'ultimo termine ha per limite zero al crescere indefinito di x, si vede che la serie che viene dalle due serie asintotiche (3) e (4) moltiplicandole con la ordinaria regola di Cauchy per la moltiplicazione delle serie è appunto la serie asintotica del prodotto $I(x).\, I_1(x)$ delle due funzioni alle quali corrispondono le stesse serie asintotiche (3) e (4).

Digitized by Google

61. Per trattare ora il caso della divisione incominciamo dal considerare il caso del quoziente $\frac{1}{I(x)}$, nel supposto che $I(x)$ abbia lo sviluppo asintotico (3) e che in questo sviluppo C_0 sia diverso da zero. Allora potremo scrivere

$$\frac{1}{I(x)} = \frac{1}{C_0} \cdot \frac{1}{1+\varphi(x)},$$

essendo $\varphi(x) = \frac{C_1}{C_0}\frac{1}{x} + \frac{C_2}{C_0}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{C_n+\varepsilon_n}{C_0}\cdot\frac{1}{x^n}$, e $\varphi(x)$ pei valori di x superiori a un certo numero λ sarà piccolo quanto si vuole e quindi in particolare sarà minore di 1.

Ne segue che per questi valori di x avremo

$$\frac{1}{1+\varphi(x)} = 1 - \varphi + \varphi^2 - \ldots \pm \varphi^n \mp \frac{\varphi^{n+1}}{1+\varphi(x)}$$

e posto questo valore di $\frac{1}{1+\varphi(x)}$ nel secondo membro di $\frac{1}{I(x)}$, basterà riunire i termini dopo $\frac{1}{C_0}$ che risulteranno coi denominatori $x, x^2, x^3, \ldots x^{n-1}$ e riunire poi tutti gli altri in un solo che risulterà dalla forma $\frac{\overline{C}_n + \overline{\varepsilon}_n}{x^n}$ con $\overline{\varepsilon}_n$ quantità che tende a zero al crescere indefinito di x, per giungere a una espressione della forma

$$\frac{1}{C_0} + \frac{\overline{C}_1}{x} + \frac{\overline{C}_2}{x^2} + \ldots + \frac{\overline{C}_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{\overline{C}_n}{x^n} + \frac{\overline{\varepsilon}_n}{x^n}$$

dove $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots \overline{C}_{n-1}, \overline{C}_n$ sono quantità costanti; e questa sarà appunto l'espressione asintotica di $\frac{1}{I(x)}$ e corrisponderà precisamente a quella che si otterrebbe eseguendo colla regola ordinaria la divisione della unità per la serie (3) come se fosse convergente; e questo sempre nel supposto che C_0 sia diverso da zero.

Digitized by Google

E del resto anche colla successiva applicazione a $\frac{1}{I(x)}$ del processo di Stielties si giunge a questo stesso risultato; ed ora, trovato questo, s' intende subito che lo stesso avverrà pel quoziente $\frac{I_1(x)}{I(x)}$ delle due funzioni $I(x)$ e $I_1(x)$ che hanno gli sviluppi asintotici (3) e (4), quando per la funzione denominatore C_0 è diverso da zero, cioè quando il denominatore $I(x)$ non tende a zero al crescere indefinito di x; il detto quoziente è infatti uguale al prodotto delle due funzioni $I_1(x)$ e $\frac{1}{I(x)}$.

62. Questi teoremi si estendono alle potenze intere positive e negative ed alle funzioni razionali di una o più funzioni per le quali si hanno gli sviluppi asintotici; e poichè non è escluso che le serie finali conseguenza di queste operazioni risultino convergenti, queste serie allora rappresenteranno rigorosamente le funzioni corrispondenti a quelle operazioni fatte sulle funzioni primitive salvo il caso della presenza di una funzione il cui sviluppo asintotico sia zero; e così in questo caso, salvo questa eccezione, le operazioni stesse per quanto fatte su serie divergenti condurranno a risultati legittimi come se fossero stati convergenti.

E, come Poincaré dimostrò, questi risultati, oltre che a funzioni razionali di una o più funzioni che hanno sviluppi asintotici, si estendono anche ad alcune serie ed in particolare alle serie $\sum A_n I^n$ ordinate per le potenze di una funzione I che ha lo sviluppo asintotico (3), nel quale C_0 è diverso da zero, quando il loro cerchio di convergenza ha un raggio superiore al valore assoluto di C_0.

63. Il caso poi della integrazione delle serie asintotiche (3), nel supposto che la funzione corrispondente $I(x)$ sia

Digitized by Google

finita e integrabile in ogni intervallo finito almeno al di là di un certo numero x_0 che potremo supporre positivo e diverso da zero, si tratta nel modo seguente.

Si osservi che per le ipotesi fatte si ha in modo perfettamente rigoroso

$$I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} = \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n},$$

e siccome in ogni intervallo *finito* al di là di x_0, $I(x)$ e quindi anche $I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}$ è atta alla integrazione, sarà lo stesso anche dell'ultimo termine del secondo membro cioè di $\frac{\varepsilon_n}{x^n}$.

D'altra parte, poichè ε_n al di là di x_0 è sempre numericamente inferiore a un numero finito A e anzi col crescere indefinito di x finisce anche per essere inferiore a qualunque numero arbitrariamente piccolo σ, l'integrale definito singolare $\int_{\gamma}^{\gamma+\delta} \frac{\varepsilon_n}{x^n} dx$ finirà per essere numericamente inferiore a $\sigma \int_{\gamma}^{\gamma+\delta} \frac{dx}{x^n}$ o $\frac{\sigma}{n-1}\left(\frac{1}{\gamma^{n-1}} - \frac{1}{(\gamma+\delta)^{n-1}}\right)$ ciò che mostra intanto che la funzione $\frac{\varepsilon_n}{x^n}$ sarà atta alla integrazione anche nell'intervallo infinito da x_0 a ∞.

Segue da ciò evidentemente che lo stesso accadrà del primo membro della formola precedente cioè della funzione $I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}$,; si avrà quindi per ogni valore finito di

Digitized by Google

x superiore a x_0 e in modo rigoroso:

$$\int_x^\infty \left\{ I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} \right\} dx = \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{2x^2} + \frac{C_4}{3x^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_n}{(n-1)x^{n-1}} + \int_x^\infty \frac{\varepsilon_n}{x^n} dx,$$

e pel primo teorema del valor medio si avrà:

$$\int_x^\infty \frac{\varepsilon_n}{x^n} dx = \bar{\varepsilon}_n \int_x^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(n-1)x^{n-1}},$$

essendo $\bar{\varepsilon}_n$ un numero non superiore al limite superiore dei valori assoluti di ε_n fra x e ∞; questo numero $\bar{\varepsilon}_n$ col crescere indefinitamente di x pur tenendo fisso n finirà anche per essere piccolo quanto si vuole; si avrà così la formola:

$$\int_x^\infty \left\{ I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} \right\} dx = \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{2x^2} + \frac{C_4}{3x^3} + \ldots + \frac{C_n}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(n-1)x^{n-1}}$$

la quale dimostra intanto che la serie

$$\frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{2x^2} + \frac{C_4}{3x^3} + \ldots + \frac{C_n}{(n-1)x^{n-1}} + \ldots,$$

sarà lo sviluppo asintotico della funzione $\int_x^\infty \left\{ I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} \right\} dx$.

Avendosi poi dalla formola trovata

$$\int_a^\infty \left\{ I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} \right\} dx = \frac{C_2}{a} + \frac{C_3}{2a^2} + \frac{C_4}{3a^3} + \ldots + \frac{C_n}{(n-1)a^{n-1}} + \frac{\bar{\varepsilon}_n(a)}{(n-1)a^{n-1}},$$

Digitized by Google

basta sottrarre da questa la precedente per giungere alla formola

$$\int_a^x \left[I(x) - C_0 - \frac{C_1}{x} \right] dx = K - \frac{C_2}{x} - \frac{C_3}{2x^2} - \frac{C_4}{3x^3} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{C_{n-1}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(n-1)x^{n-1}}$$

avendo indicate con la K costante $\frac{C_2}{a} + \frac{C_3}{2a^2} + \frac{C_4}{3a^3} + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots + \frac{C_{n-1}}{(n-1)a^{n-1}} + \frac{\varepsilon_{n-1}(a)}{(n-1)a^{n-1}}$; e da questa eseguendo le integrazioni nel primo membro, nel quale *ora* l'integrale può spezzarsi in tre, si otterrà subito l'altra

$$\int_a^x I(x)\,dx = C_0 x + C_1 \log x + C - \frac{C_2}{x} - \frac{C_3}{2x^2} - \frac{C_4}{3x^3} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{C_n}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(n-1)x^{n-1}}$$

dove C è la costante $K - C_0 a - C_1 \log a$ che dipende dal limite inferiore a dell'integrale $\int_a^x I(x)\,dx$. Estendendo ora con Poincaré il concetto di sviluppo asintotico col chiamare *sviluppo asintotico di una funzione* $\varphi(x)$ *lo sviluppo*

$$f(x) + g(x)\left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots\ldots \right)$$

quando la funzione $\frac{\varphi(x) - f(x)}{g(x)}$ *ha per sviluppo asintotico (definito come precedentemente) la serie*

$$C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_n}{x^n} \ldots\ldots,$$

Digitized by Google

si potrà dire che la serie (convergente o no)

$$C_0 x + C_1 \log x + C - \frac{C_2}{x} - \frac{C_3}{2x^2} - \frac{C_4}{3x^3} - \ldots - \frac{C_n}{(n-1)x^{n-1}} - \ldots$$

che si ottiene integrando la serie asintotica (3) che corrisponde alla funzione $I(x)$ (supposta integrabile in ogni intervallo finito al di là di un certo numero diverso da zero x_0) dà lo sviluppo asintotico dell'integrale $\int_a^x I(x)\,dx$; quando per la costante C sia preso un valore conveniente che dipende da a e che viene ad essere il limite di $\int_a^x I(x)\,dx - C_0 x - C_1 \log x$ per $x = \infty$; e questo limite certamente esisterà.

64. Quanto poi alla derivazione degli sviluppi asintotici si può dire soltanto che questa potrà farsi certamente quando si sappia che la funzione che corrisponde allo sviluppo asintotico dal quale si parte, ha una derivata che ammette uno sviluppo asintotico, perchè allora applicando a quest'ultimo sviluppo l'integrazione si ritorna necessamente alla primitiva.

La somma di Borel per le serie. Serie sommabili secondo Borel.

65. Come dicemmo nei § 38 e seg., avendosi una serie qualsiasi $\sum u_n$ si sono introdotti nell'Analisi certi elementi che dipendono dai termini della serie e dal loro ordine di successione, e che nel caso delle serie convergenti si riducono alla somma della serie: e pei quali è invalso l'uso di chiamarli impropriamente *somma* della serie anche quando questa è divergente.

Digitized by Google

Di questi elementi, dei quali potrebbero introdursene un numero infinito, sono più specialmente notevoli quello di Cesàro, che è il limite per $n = \infty$ delle medie

$$\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$$

delle somme successive $s_0, s_1, s_2, \ldots$; e quello di Borel che — pure modificandolo leggermente dopo — Egli introduce dapprima come il limite per $a = \infty$, quando esiste, della funzione

$$\frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 a + c_2 s_2 a^2 + c_3 s_3 a^3 + \ldots}{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + c_3 a^3 + \ldots},$$

limitandosi però in primo luogo al caso in cui

$c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{1}$, $c_2 = \frac{1}{1.2}$, $c_3 = \frac{1}{1.2.3}$, ... cioè al caso in cui la serie del denominatore è quella esponenziale di e^a; per modo quindi che l'elemento introdotto da Borel è il limite per $a = \infty$, quando esiste, della espressione

$$(1) \qquad \frac{s_0 + s_1 \frac{a}{1} + s_2 \frac{a^2}{1.2} + s_3 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots}{1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots}$$

Borel poi, dopo di aver detto che il metodo che così si introduce per sommare le serie divergenti è da chiamarsi il metodo *della somma esponenziale*, indica con s questo limite, e stabilisce di prenderlo come *somma* della serie, la quale allora (cioè quando il detto limite esiste) viene detta da lui *serie sommabile;* e noi fermandoci alquanto sugli studi fatti da Borel, esporremo con poche modificazioni alcuni fra i principali dei risultati ottenuti da lui che sono certamente interessanti, non in quanto sia da ammettersi che conducano a sommare le serie divergenti, ciò che noi

Digitized by Google

escludiamo, ma in quanto danno particolarità notevoli degli elementi che vengono introdotti nell'Analisi.

66. Prima però di fermarci sugli studi fatti da Borel, troviamo opportuno di esporre alcune considerazioni in relazione alle medie o somme introdotte da Cesàro, per le quali si può intanto osservare, in seguito a quanto dicemmo nella nota al § 39, che, quando queste somme di Cesàro hanno un significato, cioè quando il limite di $\frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$ è determinato e finito, hanno una certa analogia colla somma di Borel perchè possono anche considerarsi come il limite per $a = 1 - 0$ della espressione

$$\frac{s_0 + s_1 a + s_2 a^2 + s_3 a^3 + \ldots}{1 + a + a^2 + a^3 + \ldots} .$$

E si può anche osservare che se una serie è convergente, tanto la somma di Cesàro quanto quella di Borel combinano come già vedemmo colla somma ordinaria della serie; e nel caso delle serie reali può dirsi che lo stesso avvenga quando la serie è divergente e ha per somma $\pm\infty$, perchè allora tanto la somma di Cesàro quanto quella di Borel sono uguali a $\pm\infty$, come si vede subito spezzando al solito la somma di Cesàro $\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$ o la serie (1) di Borel in due parti, una formata coi primi termini fino a quello corrispondente al numero (finito) m dopo il quale le s_n sono maggiori di un numero dato arbitrariamente grande K e l'altro coi termini seguenti; e lo stesso avverrà per le serie complesse quando la loro somma ordinaria abbia per modulo l'infinito, perchè una almeno delle due serie delle parti reali dei coefficienti dell'immaginario dovrà avere la somma infinita.

Digitized by Google

Così le somme di Cesàro e di Borel non è il caso di considerarle altro che per le serie indeterminate.

Riprendendo poi le formole che trovammo quando dimostrammo il teorema di Frobenius al § 11 (*), ricordiamo che ammettendo che per una serie $\sum u_n$ la somma di Cesàro abbia un significato e sia M, posto

$$(2) \qquad \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots s_n}{n+1} = M + \varepsilon_{n+1}$$

le ε_{n+1} tenderanno a zero al crescere indefinito di n e si avrà

$$s_n = M + (n+1)\varepsilon_{n+1} - n\varepsilon_n, \quad u_n = (n+1)\varepsilon_{n+1} - 2n\varepsilon_n + (n-1)\varepsilon_{n-1};$$

e se la serie data $\sum u_n$ sarà convergente, siccome allora M sarà anche il limite di s_n, posto

$$3) \qquad d_n = (n+1)\varepsilon_{n+1} - n\varepsilon_n$$

si potrà affermare che queste quantità d_n avranno per limite zero al crescere indefinito n; e viceversa se indipendentemente dal supporre che la somma di Cesàro abbia un significato, indicando con M una certa quantità e ponendo la (2) si troverà che le quantità (3) hanno per limite zero per $n = \infty$, la serie sarà convergente e avrà per somma M.

Da qui risulta intanto che quando la serie $\sum u_n$ è indeterminata, se la somma di Cesàro ha un significato ed è M, le quantità d_n non potranno avere per limite zero; e oltre a questo limitandoci senz'altro, per semplicità, al caso delle serie reali $\sum u_n$, è facile altresì di vedere che neppure potranno avere un limite diverso da zero e finito, o senza

(*) Vedi la memoria del D.: « Sulla moltiplicazione della serie » pubblicata in questi *Annali*, Nuova Serie, vol. V, Fasc. 8, anno 1920.

Digitized by Google

avere un limite determinato e finito potranno mantenersi sempre dello stesso segno e discoste da zero più di un certo numero

Si osservi infatti che per essere $s_n = M + d_n$, se d_n avesse un limite determinato e finito diverso da zero d la serie $\sum_1 u_n$ sarebbe convergente, ma invece di aver per somma M avrebbe per somma $M + d$, ciò che è da escludersi. Se poi le d_n da un certo valore di n in poi si mantenessero ad esempio sempre positive o zero avremmo sempre $(n+1)\varepsilon_{n+1} \geq n\varepsilon_n$, e i prodotti $n\varepsilon_n$ avrebbero un limite finito o infinito; e nel caso del limite finito, d_n avrebbe per limite lo zero.

Quando poi i prodotti $n\varepsilon_n$ avessero per limite l'infinito (positivo) allora le d_n potrebbero avere un limite diverso da zero o positivo, finito o infinito, e in tal caso la serie sarebbe convergente ma non avrebbe per somma M, o sarebbe divergente per avere per somma $+\infty$, e questi casi sono da escludersi; come in generale non potrà avvenire che le d_n, almeno da un certo valore finito p di n in poi (avendo del resto o no un limite), siano discoste da zero più di un certo numero τ, perchè allora avremmo le diseguaglianze

$$(p+1)\varepsilon_{p+1} - p\varepsilon_p > \tau \qquad (p+2)\varepsilon_{p+2} - (p+1)\varepsilon_{p+1} > \tau, \ldots$$
$$(p+s)\varepsilon_{p+s} - (p+s-1)\varepsilon_{p+s-1} > \tau$$

con s grande quanto si vuole, e sommandole si troverebbe $(p+s)\,\varepsilon_{p+s} - p\varepsilon_p > s\tau$ e quindi $\varepsilon_{p+s} > \frac{s\tau}{p+s} + \frac{p.\varepsilon_p}{p+s}$, e poichè $\frac{s}{p+s}$ tenderebbe ad uno col crescere di s le ε_{p+1} non si ridurrebbero piccole a piacere, ciò che è contrario all'ipotesi che la somma di Cesàro abbia un significato.

In altri termini dunque se una serie $\sum u_n$ è indetermi-

Digitized by Google

nata e per essa la somma di Cesàro ha un significato, i limiti superiori e inferiori della quantità d_n non potranno essere ambedue discosti da zero e dello stesso segno, ma dovranno essere il superiore positivo e l'inferiore negativo o zero, o viceversa il superiore positivo o zero e l'inferiore negativo.

Il caso più notevole poi sarà quello nel quale essendo continuamente le quantità d_n alcune positive e alcune negative, quelle positive al crescere indefinito di n avranno un limite H, e così quelle negative avranno esse pure un limite $-K$.

In questo caso osserviamo che se m è un valore (finito) di n dopo il quale le d_n positive e le d_n negative sono vicine rispettivamente a H e $-K$ più di un numero arbitrariamente piccolo dato σ, le somme di Cesàro spinte fino alle s_{m+p+q} con $p+q$ grande quanto si vuole e essendo p il numero delle d_n positive e q quelle della d_n negative fra le $p+q$ delle d_n che seguono la d_m, potranno scriversi sotto la forma

$$\frac{s_0+s_1+s_2+\ldots+s_m}{m+p+q+1}+\frac{p+q}{m+p+q+1}M+\frac{d_{m+1}+d_{m+2}+\ldots+d_{m+p+q}}{m+p+q+1}$$

e poichè in questa espressione al crescere indefinito di $p+q$ il primo termine tenderà a zero e il secondo tenderà a M, anche l'ultimo termine dovrà tendere a zero perchè le medie di Cesàro possano avere per limite M.

Ma, ponendo per le d_n positive $d_n = H+\sigma'_n$, e per le d_n negative $d_n = -K+\sigma'_n$, l'ultimo termine della espressione precedente potrà porsi sotto la forma

$$\frac{pH-qK}{p+q}\,\frac{1}{1+\dfrac{m+1}{p+q}}+\frac{\sigma'_{m+1}+\sigma'_{m+2}+\ldots+\sigma'_{m+p+q}}{m+p+q+1}$$

Digitized by Google

e in questa l'ultimo termine, essendo numericamente inferiore a $\frac{p+q}{m+p+q+1}\sigma$, sarà arbitrariamente piccolo talchè si conclude che lo stesso dovrà avvenire di $\frac{pH-qK}{p+q}$.

Indicato quindi con $\bar{\sigma}$ questo termine, esso sarà arbitrariamente piccolo e dovremo avere $p(H-\bar{\sigma}) = q(K+\bar{\sigma})$, e quando H e K siano diversi da zero dovrà essere $\frac{p}{q} = \frac{K+\bar{\sigma}}{H-\bar{\sigma}}$, cioè $\frac{p}{q}$ dovrà tendere verso $\frac{K}{H}$, mentre se una delle due quantità H e K, ad esempio K, sarà zero dovrà tendere a zero il rapporto $\frac{p}{q}$.

In particolare quindi, quando a partire da un certo valore n le d_n siano alternativamente positive e negative e le positive abbiano per limite H e le negative $-K$, allora, poichè i numeri p e q saranno sempre uguali fra loro o differiranno di una unità l'uno dall'altro, per modo che il loro rapporto avrà per limite 1, dovrà essere $H = K$, cioè le somme successive della serie data $\sum u_n$ dovranno tendere alternativamente verso $M+H$ e verso $M-H$, precisamente come avviene per la serie

$$1-1+1-1+1-1+\ldots,$$

per la quale si ha appunto $M = \frac{1}{2}$ e $H = \frac{1}{2}$.

Più generalmente si potrebbe trovare anche che, se per una serie $\sum u_n$ le quantità d_n si dividono in due classi e quelle della prima classe hanno un limite determinato e finito L e quello della seconda hanno un limite pure determinato e finito L_1, e p e q sono per L e L_1 i numeri ana-

Digitized by Google

loghi a quelli che avevano sopra per H e $-K$, dovremo avere la formola $p(L-\bar{\sigma})+q(L_1-\bar{\sigma})=0$, dalla quale torna a risultare che L e L_1 non possono essere entrambi positivi e diversi da zero o entrambi negativi e diversi da zero ecc.

67. Ciò premesso si consideri ancora una serie $\sum u_n$ per la quale la somma di Cesàro abbia un significato e sia M, e si prenda a considerare anche la somma di Borel corrispondente

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\left\{s_0+s_1\frac{a}{1}+s_2\frac{a^2}{1.2}+\ldots.+s_n\frac{a^n}{\pi(n)}+\ldots.\right\}$$

Indicando m_1 il numero (finito) a partire dal quale le medie di Cesàro $\frac{s_0+s_1+s_2+\ldots.+s_n}{n+1}$ differiscono da M meno di σ, la somma di Borel, colle notazioni poste sopra, potrà scriversi sotto la forma

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}\left\{M+d_0+(M+d_1)\frac{a}{1}+(M+d_2)\frac{a^2}{1.2}+\ldots+(M+d_n)\frac{a^n}{\pi(n)}+\ldots\right\}=$$

$$=M+\lim_{a=\infty} e^{-a}\left\{d_0+d_1\frac{a}{1}+d_2\frac{a^2}{1.2}+\ldots+d_{m_1}\frac{a^{m_1}}{\pi(m_1)}\right\}+\lim_{a=\infty} e^{-a}\sum_{m_1+1}^{\infty} d_n\frac{a^n}{\pi(n)}$$

e siccome al crescere indefinito di a, essendo m_1 finito, la prima parte $e^{-a}\left\{d_0+d_1\frac{a}{1}+d_2\frac{a^2}{1.2}+\ldots+d_{m_1}\frac{a^{m_1}}{\pi(m_1)}\right\}$ tende a zero, si vede subito da questo — come del resto è bene naturale che sia — che se le d_n hanno per limite zero per $n=\infty$, nel qual caso la serie $\sum u_n$ è convergente e ha per somma M, anche la somma di Borel sarà M.

Così pure anche nel caso che, essendo la serie $\sum u_n$ indeterminata, da un certo punto in poi le quantità d_n siano alternativamente positive e negative, e sì le positive che le

Digitized by Google

negative abbiano limiti determinati e finiti che allora per quanto dicemmo sopra saranno diversi da zero e uguali fra loro e di segno contrario e potranno indicarsi con H e $-H$, si osserverà che la parte $e^{-a}\sum_{m_1+1}^{\infty} d_n \frac{a^n}{\pi(n)}$ si ridurrà all'altra

$$\pm He^{-a}\left(1-\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}-\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots\right)+\omega=\pm He^{-2a}+\omega,$$

essendo ω una quantità che col crescere indefinito di a tende a zero come vi tende l'altra parte $\pm He^{-2a}$, e quindi anche in questo caso la somma di Borel sarà M, cioè le somme di Cesàro e quelle di Borel saranno le stesse.

Fuori di questi casi nulla può dirsi, e si comprende anche come possono esservi casi nei quali, pure esistendo tanto la somma di Cesàro quanto quella di Borel, non vengono queste somme ad essere uguali, ciò che mette ancora in evidenza quanto vi sia di vago e d'indeterminato nel volere introdurre nuovi elementi come somme delle serie divergenti.

68. Tornando ora agli studi che abbiamo detto di volere fare sugli elementi introdotti da Borel come somma della serie, prendiamo a studiare la espressione (1) che, come abbiamo detto, supporremo che abbia un limite determinato e finito s per $a=\infty$; e indichiamo con $s(a)$ la funzione numeratore, che dovrà essere necessariamente una funzione intera di a che pei valori reali e positivi di a cresce con a all'infinito; cioè poniamo

$$4) \qquad s(a)=s_0+s_1\frac{a}{1}+s_2\frac{a^2}{1.2}+s_3\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots,$$

con che sarà $s=\lim_{a=\infty}\{e^{-a}s(a)\}$; e osservando che per $a=0$ si ha $e^{-a}s(a)=s_0=u_0$, e che $s(a)$ ammette una derivata per tutti i valori finiti di a, potremo scrivere

$$s-u_0=\lim_{a=\infty}\int_0^a \frac{d}{da}\{e^{-a}s(a)\}da,$$

Digitized by Google

e quindi anche

$$s - u_0 = \int_0^\infty \frac{d}{da} \left\{ e^{-a} s(a) \right\} da ,$$

ciò che permette di dire che, sotto la ipotesi fatta della esistenza del limite s della espressione (1), la funzione $e^{-a} . s(a)$ avrà una derivata atta alla integrazione da 0 a ∞ e potremo anche scrivere

$$5) \qquad s - u_0 = \int_0^\infty e^{-a} \left\{ s'(a) - s(a) \right\} da ;$$

e viceversa, nel supposto che la funzione $s(a)$ data dalla (4) sia una funzione intera di a, basterà assicurarsi che il secondo membro di quest'ultima formola (5) abbia un significato per essere certi che la espressione (1) ha un limite determinato e finito che è appunto quello s dato da questa formola (5).

Ora, poichè manteniamo il supposto che $s(a)$ sia una funzione intera rappresentata dalla serie (4) — come del resto certamente è sempre quando la espressione (1) ha un limite determinato e finito s —, avremo

$$s'(a) = s_1 + s_2 \frac{a}{1} + s_3 \frac{a^2}{1.2} + s_4 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots$$

e quindi

$$s'(a) - s(a) = u_1 + u_2 a + u_3 \frac{a^2}{1.2} + u_4 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots$$

cioé indicando con $u_1(a)$ la funzione intera rappresentata della serie del 2.° membro, cioè ponendo

$$6) \qquad u_1(a) = u_1 + u_2 a + u_3 \frac{a^2}{1.2} + u_4 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots$$

si vede che sotto la ipotesi fatta che la espressione (1) ab-

Digitized by Google

bia il limite s per $a = \infty$, l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} u_1(a) da$ avrà un significato, e si avrà

$$7) \qquad s - u_0 = \int_0^\infty e^{-a} u_1(a)\, da\,;$$

e viceversa se essendo $s(a)$ una funzione intera si troverà che la funzione pure intera $u_1(a)$ è tale che per essa l'integrale del secondo membro della (7), cioè $\int_0^\infty e^{-a} u_1(a) da$, ha un significato, sussisteranno le formole precedenti e la espressione (1) avrà il limite determinato e finito s dato dalla stessa formola (7).

69. Se poi avverrà in particolare che non solo sia applicabile l'integrazione da 0 a ∞ al prodotto $e^{-a} u_1(a)$, ma sia anche applicabile la stessa integrazione termine a termine alla serie che rappresenta $u_1(a)$ dopo di averla moltipliaata per e^{-a}(*), allora avendosi

$$s - u_0 = \sum_1^\infty \frac{u_n}{\pi(n-1)} \int_0^\infty a^{n-1} e^{-a} da = \sum_1^\infty \frac{u_n}{\pi(n-1)} \Gamma(n) = \sum_1^\infty u_n$$

si vede che in tal caso la serie $\sum u_n$ sarà convergente e la sua somma sarà naturalmente s, come viceversa se la serie

---

(*) Questo pel teorema dato nell'appendice al Vol. II delle mie Lezioni di Analisi infinitesimale alla pag. 1038 avverrà in particolare quando indicando con $\overline{u}_1(a)$ la somma delle serie dei moduli della serie (4) anche l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} \overline{u}_1(a) da$ avrà un significato, o quando la serie $\sum \frac{u_n}{\pi(n-1)} \int_0^x e^{-a} a^{n-1} da$ risulti convergente in ugual grado da un numero comunque grande β all'infinito nel qual caso tenderà verso la somma della serie Σu_n, che sarà convergente (V. Lez. Anal. infinit. tom. I Introd. § 104 pag. XCV).

Digitized by Google

data $\sum u_n$ sarà convergente e avrà per somma s, risultando allora soddisfatte tutte le condizioni per le quali si ha la (7) e dalla formola $s - u_0 = \sum_1^\infty u_n$ deducendosi l'altra

$$s - u_0 = \sum_1^\infty \frac{u_n}{\pi(n-1)} \Gamma(n) = \sum_1^\infty \frac{u_n}{\pi(n-1)} \int_0^\infty a^{n-1} e^{-a} da$$

si vede che alla serie (6) dopo di averla moltiplicata per e^{-a} sarà applicabile l'integrazione termine a termine fino all'infinito.

70. Ma, restando ora nel caso generale che la serie data $\sum u_n$ possa anche non essere convergente, noi scriveremo soltanto la formola (7) che poniamo sotto la forma

$$s - u_0 = \lim_{a=\infty} \int_0^a e^{-a} u_1(a)\, da\,,$$

e applicando in questa la integrazione per parti all'integrale, avremo

$$8) \qquad s - u_0 = \lim_{a=\infty} \left\{ e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da + \int_0^a e^{-a} \left[\int_0^a u_1(a)\, da \right] da \right\};$$

e quindi se si pone la condizione che la funzione $u_1(a)$ sia integrabile fino all'infinito, o almeno che il prodotto $e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da$ (*) abbia per limite zero per $a = \infty$, avremo

$$s - u_0 = \int_0^\infty e^{-a} \left[\int_0^a u_1(a)\, da \right] da\,,$$

(*) Questa condizione, che non è posta, almeno esplicitamente, da Borel perchè pare che Egli la ritenga sempre verificata (mentre nel fatto non riescirà verificata che sotto certe condizioni come vedremo anche più oltre) è una condizione indispensabile, e senza di questa la formola (10) non sussiste affatto quand'anche l'integrale del secondo membro abbia un valore determinato e finito, non bastando questo per poter dire che il prodotto $e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da$ avrà per limite zero, come chiaro apparisce da quanto è detto sopra.

Essa però sarà sempre soddisfatta se le u_n tenderanno a zero,

Digitized by Google

e di qui osservando che

$$u_0 = u_0 \int_0^\infty e^{-a}\, da\,,$$

e ponendo

$$u(a) = u_0 + \int_0^a u_1(a)\, da\,,$$

---

al crescere indefinito di n, perchè allora la serie di $u_1(a)$ sarà convergente in ugual grado e quindi integrabile termine a termine in qualunque intervallo finito, e indicando con m un numero a partire dal quale i moduli della u_n sono inferiori a un numero arbitrariamente piccolo dato σ, potremo scrivere

$$\int_0^a u_1(a)\, da = u_1 \frac{a}{1} + u_2 \frac{a^2}{1.2} + u_3 \frac{a^3}{1.2.2} + \ldots + u_m \frac{a^m}{\pi(m)} + R_m$$

essendo $R_m = u_{m+1} \dfrac{a^{m+1}}{\pi(m+1)} + u_{m+2} \dfrac{a^{m+2}}{\pi(m+2)}$ ... e quindi $|R_m| < \sigma e^a$,

e se K sarà il massimo modulo delle prime m delle $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ avremo

$$\left| e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da \right| < K e^{-a} a^m \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{\pi(m)}\right) + \sigma < K e . e^{-a} a^m + \sigma;$$

e poichè essendo m finito, $e^{-a} a^m$ ha per limite zero per $a = \infty$, questo basta per poter dire che il prodotto $e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da$ ha esso pure per limite zero.

Se invece le $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ saranno tutte positive e non inferiori a K, avendosi $\int_0^a u_1(a)\, da > K(e^a - 1)$ sarà

$$e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da \geq K\left(1 - \frac{1}{e^a}\right),$$

e il prodotto $e^{-a} \int_0^a u_1(a)\, da$ non avrà per limite zero. E in questo caso se le $u_1, u_2, \ldots u_n$ non supereranno mai un numero finito K_1 si trova pure che lo stesso prodotto tenderà a restare compreso fra K e K_1. Però in questi ultimi casi abbiamo che la somma di Borel non ha significato per quanto osservammo in generale, perchè allora la serie data è divergente e ha per somma $+\infty$,

Digitized by Google

ovvero

$$9) \qquad u(a) = u_0 + u_1 \frac{a}{1} + u_2 \frac{a^2}{1.2} + u_3 \frac{a^3}{1.2.3} + \dots$$

avremo la formola seguente

$$10) \qquad s = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da,$$

nella quale la funzione $u(a)$ è definita dalla formola (9), quando come abbiamo detto il prodotto $e^{-a}\int_0^a u_1(a)\,da$ abbia per limite zero per $a = \infty$; mentre quando questo prodotto abbia un limite determinato e finito, ma differente da zero H, l' integrale $\int_0^\infty e^{-a}\left[\int_0^a u_1(a)\,da\right]da$ avrà ancora un significato ma alla formola (10) bisognerà sostituire l'altra

$$11) \qquad s = H + \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da\ ;$$

e se il detto prodotto $e^{-a}\int_0^a u_1(a)\,da$ non avrà un limite determinato e finito lo stesso accadrà dell' integrale che figura nel secondo membro della (10) che rimarrà priva di significato, e allora non ci si potrà valere che della formola (7).

71. Introducendo dunque la funzione $u(a)$ definita dalla serie

$$12) \qquad u_0 + u_1 \frac{a}{1} + u_2 \frac{a^2}{1.2} + \dots + u_n \frac{a^n}{\pi(n)} + \dots\ ,$$

che Borel chiama la *serie associata* di quella data $\sum u_n$, e supponendo soddisfatte tutte le condizioni che hanno condotto alla formola (10) che si riducono a quelle che la serie

Digitized by Google

(4) rappresenti una funzione intera di a(*), e all'altra che il prodotto $e^{-a}\int_0^a u_1(a)\,da$ o l'altra $e^{-a}u(a)$ abbiamo per limite zero per $a=\infty$, al limite s della espressione (1) potrà sostituirsi l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,d(a)$, essendo $u(a)$ la serie associata della $\sum u_n$; talchè volendo continuare a chiamare somma della serie data $\sum u_n$ il limite per $a=\infty$ della espressione (1) quando esiste, e volendo al tempo stesso rappre-

---

(*) La condizione che la serie (4) rappresenti una funzione intera di a è, come già dicemmo, conseguenza necessaria della definizione che dà Borel della «somma» della serie $\sum u_n$ considerandola come limite della espressione (1), e qui è stata sempre ammessa per potere giungere alle formole (7) e (10). Del resto essa è sempre soddisfatta quando i moduli dei termini della serie data $\sum u_n$ non superano mai un numero finito o anche più generalmente quando pure crescendo indefinitivamente con n crescono però di un ordine non superiore a quello della potenza n^a di un numero $\lambda \geq 1$, per modo cioè da avere sempre $|u_n| \leq K\lambda^n$ essendo K un numero finito e anche più generalmente quando almeno da un certo valore di n in poi si ha sempre $u_n < K\varphi(n)$ essendo $\varphi(n)$ una funzione che pure crescendo indefinitamente, è tale che il rapporto $\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$ resti sempre inferiore a un certo numero finito; perchè allora la serie (4) almeno da un certo punto in poi avrà i moduli dei suoi termini inferiori ai termini della serie $\sum \frac{(n+1)K\varphi(n)a^n}{\pi(n)}$ che è convergente per qualunque valore finito di a. Lo stesso evidentemente avviene e *a fortiori* per la serie associata (12).

E così per questo e per quanto dicemmo nella nota precedente le due condizioni sopra indicate sono certo soddisfatte quando i termini della serie $\sum u_n$ tendono a zero al crescere indefinito di n, e in particolare quando la serie stessa è convergente; talchè per quanto ha riguardo alla condizione che nel caso della convergenza le nuove somme si riducano alla somma ordinaria della serie, si può dire che essa riesce sempre soddisfatta.

Digitized by Google

sentarlo coll'integrale $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da$ bisogna di necessità limitarsi al caso in cui sono soddisfatte le condizioni ora indicate, le quali portano di per sè che la serie associata (12) — per essere questa serie la differenza delle serie corrispondenti a $s'(a)$ e $s(a)$ — rappresenti una funzione intiera.

Borel però senza accennare affatto alle condizioni testè indicate e senza più riferirsi alla espressione (1) nè alla serie (4), e solo introducendo in campo per ogni serie $\sum u_n$ che si consideri la serie associata (12) e richiedendo dapprima che questa serie rappresenti una funzione intera $u(a)$ di a, quale è venuta appunto dalle condizioni precedenti, chiama senz'altro «somma» della serie data $\sum u_n$ l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} u(a)da$ quando questo integrale ha un significato, ed in questi casi chiama la serie data *serie sommabile.*

Rilevando poi che per studiare questa serie in generale si hanno quelle difficoltà che s'incontrano per lo studio delle serie che non sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei loro termini, osserva che conviene limitarsi a considerare quelle serie per le quali non solo ha un significato l'integrale precedente $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da$ ma lo hanno anche gli altri

$$\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|\,da,\ \int_0^\infty e^{-a}|u'(a)|\,da,\ \int_0^\infty e^{-a}|u''(a)|\,da,\ldots\ \int_0^\infty e^{-a}|u^{(\lambda)}(a)|\,da,\ldots$$

essendo λ un indice di derivazione qualsiasi, e chiama queste ultime *serie assolutamente sommabili.*

72. Per quanto precede però quando non si avessero altre condizioni dovrebbe essere sempre posta come condizione anche l'altra $\lim_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0$ della quale però il Borel non fa cenno affatto, pure qua e là dicendola soddisfatta.

Digitized by Google

Borel non dice la ragione di questo, per quanto la indicata condizione debba pure essere posta esplicitamente quando si tratti di serie per le quali si richieda soltanto che l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da$ abbia un significato (*); però quando si tratti di serie assolutamente sommabili è facile vedere che quella condizione viene soddisfatta da sè, e

---

(*) Che vi siano funzioni $\varphi(a)$ per le quali un integrale $\int_0^\infty \varphi(a)\,da$ ha un significato anche quando $\varphi(a)$ — pure anche se è sempre positiva — non ha per limite zero per $a = \infty$ risulta subito dalle considerazioni seguenti.

Questo è notissimo per funzioni che cambino continuamente di segno al crescere indefinito di a perchè ad esempio gli integrali $\int_0^\infty \operatorname{sen}(a^2)\,da$, $\int_0^\infty \sqrt{a}\operatorname{sen}(a^2)\,da$, ... hanno un significato.

Se poi $\varphi(a)$ è una funzione sempre positiva almeno da un certo valore di a in poi finita e atta all'integrazione fino all'infinito, osserviamo che i suoi integrali definiti singolari $\int_\beta^{\beta+\gamma} \varphi(a)\,da$ finiranno per essese piccoli quanto si vuole pei valori di β superiori a un certo numero positivo, e per γ positivo qualsiasi.

Si considerino ora dei numeri positivi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ successivamente crescenti all'infinito con certe leggi, per es. i numeri interi, e si escludano i punti dell'asse reale corrispondenti a questi numeri con intorni di ampiezza $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tali che la serie $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$ risulti convergente, e si costruisca una nuova funzione $F(a)$ che negli intervalli non esclusi sia uguale a $\varphi(a)$, e negli intorni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ sia uguale ad un'altra funzione che negli intorni stessi sia sempre positiva e prenda anche valori discosti da zero più di un certo numero, e per la quale potremo anche supporre che in quegli intorni sia sempre continua e che si attacchi con continuità alla funzione $\varphi(a)$ nei punti estremi degli stessi intorni.

Questa nuova funzione $F(a)$ così costruita non avrà per limite zero per $a = \infty$, ma sarà ancora integrabile in ogni intervallo fi-

Digitized by Google

quindi allora è effettivamente inutile di parlarne, e così noi pure trattando di queste serie non accenneremo alla detta condizione poichè sarà necessariamente sempre soddisfatta.

Si osservi infatti in generale (ciò che del resto è ben noto) che se un integrale $\int_{\alpha}^{\infty} |\varphi(a)|\,da$ ha un significato lo stesso necessariamente accade dell'altro $\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(a)\,da$ comunque si comporti $\varphi(a)$ rispetto ai segni, perchè per gli integrali definiti singolari si avrà $\left|\int_{\beta}^{\beta+\gamma} \varphi(a)\,da\right| \leq \int_{\beta}^{\beta+\gamma} |\varphi(a)|\,da$. E se un integrale $\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(a)\,da$ avrà un significato, la funzione $\varphi(a)$ al crescere indefinito di a o dovrà avere per limite lo zero o per lo meno (come avviene per la funzione $F(a)$

---

nito, e per essa avremo:

$$\int_{\beta}^{\beta+\gamma} F(a)\,da < \int_{\beta}^{\beta+\gamma} \varphi(a)\,da + \int_{\varepsilon_n} F(a)\,da + \int_{\varepsilon_{n+1}} F(a)\,da + \ldots$$

ovvero

$$\int_{\beta}^{\beta+\gamma} F(a)\,da < \int_{\beta}^{\beta+\gamma} \varphi(a)\,da + \varepsilon_n \overline{F}_n + \varepsilon_{n+1} \overline{F}_{n+1} + \ldots$$

essendo ε_n, ε_{n+1}, ... le ampiezze degli intorni ε_n, ε_{n+1}, ... che cadranno nell'intervallo $(\beta, \beta + \gamma)$ e $\overline{F}_n$, $\overline{F}_{n+1}$, ... i limiti superiori $F(a)$ in quegli intorni.

Di qui risulta che se le $\overline{F}_n$, $\overline{F}_{n+1}$, ... che per le nostre ipotesi sono sempre positive e discoste da zero si manterranno sempre inferiori a un numero finito o anche se pur crescendo indefinitamente con n saranno tali che anche la serie $\varepsilon_1 \overline{F}_1 + \varepsilon_2 \overline{F}_2 + \ldots + \varepsilon_n \overline{F}_n + \ldots$ sia convergente, pei valori di β superiori a un certo numero l'integrale definito singolare $\int_{\beta}^{\beta+\gamma} F(a)\,da$ sarà piccolo quanto si vuole e quindi la nostra funzione sempre positiva $F(a)$ sarà atta alla integrazione anche all'infinito senza che essa tenda a zero col crescere indefinito di a.

Digitized by Google

che abbiamo costruito nella ultima nota) dovrà prendere anche valori prossimi a zero tanto quanto si vuole; perchè se a partire da un certo valore β di a si mantenesse sempre discosta da zero più di un certo numero A indicando con A_1 un numero compreso fra 0 e A avremmo $\left|\int_{\beta}^{\beta+\gamma}\varphi(a)\,da\right| > A_1\gamma$ e la funzione $\varphi(a)$ non sarebbe integrabile all'infinito.

Osservando quindi, nel caso dell'integrale $\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da$ o dell'altro $\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|\,da$, che colla integrazione per parti si ha

$$\int_0^a e^{-a}u(a)\,da = -e^{-a}u(a) + u_0 + \int_0^a e^{-a}u'(a)\,da$$

se ne deduce subito che se i due integrali $\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|\,da$ e $\int_0^\infty e^{-a}|u'(a)|\,da$ e anche soltanto i due $\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da$ e $\int_0^\infty e^{-a}u'(a)\,da$ hanno un significato, il prodotto $e^{-a}u(a)$ avrà un limite determinato e finito per $a=\infty$, ciò che porta allora che dovrà necessariamente avere per limite zero per $a=\infty$ come abbiamo affermato sopra (*).

(*) In generale, avendosi colla integrazione per parti

$$\int_\alpha^a \varphi'(a)\psi(a)\,da = \Big[\varphi(a)\psi(a)\Big]_\alpha^a - \int_\alpha^a \varphi(a)\psi'(a)\,da,$$

siccome se due termini di questa formola avranno un limite determinato e finito per $a=\infty$ lo stesso accadrà dell'altro, la formola varrà anche per $a=\infty$, cioè sarà

$$\int_\alpha^\infty \varphi'(a)\psi(a)\,da = \Big[\varphi(a)\psi(a)\Big]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty \varphi(a)\psi'(a)\,da =$$
$$= \left[\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)}\varphi'(a)\psi(a)\right]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty \varphi(a)\psi'(a)\,da;$$

ed oltre a inferirne che se i due integrali che vi figurano avranno un

Digitized by Google

73. Aggiungiamo che, pure limitandosi poi il più spesso alla considerazione di serie Σu_n per le quali la serie associata (12) è una funzione intera di a e che sono assolutamente sommabili, Borel rilevando che ci sono anche serie Σu_n per le quali la serie associata (12) non rappresenta una funzione intera, accenna anche al caso in cui questa serie associata ha soltanto un raggio di convergenza *finito* e diverso da zero, ma al tempo stesso la funzione che le corrisponde entro il cerchio di convergenza, può essere data o prolungata analiticamente senza singolarità lungo l'asse reale positivo, come è ad es. per la serie $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{a^n}{n}$ di $\log(1+a)$ che si prolunga con questa funzione $\log(1+a)$ senza singolarità per tutti i valori reali e positivi di a superiori ad uno; e allora indicando ancora con $u(a)$ la funzione (non più funzione intera) che così si ottiene per tutti i valori positivi della variabile a, e non riferendosi più affatto al limite della espressione (1) che non avrebbe più alcun significato, ma solo alla serie associata e alla funzione $u(a)$ (da considerarsi pei valori reali di a) alla quale questa serie dà luogo, generalizza il concetto precedente, e chiama ancora « *somma* » della serie data Σu_n l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da$, e *serie assolutamente sommabile* la serie stessa

---

significato anche il prodotto $\varphi(a)\psi(a)$ avrà un limite determinato e finito per $a=\infty$, se ne concluderà anche che se al tempo stesso il rapporto $\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$ avrà esso pure un limite determinato e finito per $a=\infty$ il prodotto $\varphi'(a)\psi(a)$ dovrà avere per limite lo zero, e lo stesso allora avverrà anche del prodotto $\varphi(a)\psi(a)$, e sarà quindi

$$\int_\alpha^\infty \varphi'(a)\,\psi(a)\,da = -\varphi(\alpha)\psi(\alpha) - \int_\alpha^\infty \varphi(a)\psi'(a)\,da.$$

Digitized by Google

Σu_n quando non solo abbia un significato questo integrale ma lo abbiano anche gli altri

$$\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|da,\ \int_0^\infty e^{-a}|u'(a)|da,\ \int_0^\infty e^{-a}|u''(a)|da,\ldots \int_0^\infty e^{-a}|u^{(\Omega)}(a)|da,..;$$

mentre le chiama soltanto *sommabili* quando non si pongono condizioni per questi ultimi integrali; e noi pure così faremo d'ora innanzi.

E così in particolare avendo le serie

13) $1-1+1.2-1.2.3+1.2.3.4-1.2.3.4.5+\ldots$

e

14) $1+1-1+1.2-1.2.3+1.2.3.4-1.2.3.4.5\ldots.$

per le quali le serie associate corrispondenti sono rispettivamente le due

$$1-a+a^2-a^3+a^4-\ldots \quad \text{e} \quad -1+\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\ldots.$$

che hanno per cerchio di convergenza quello di raggio *uno* e in questo cerchio dànno luogo rispettivamente alle funzioni $\frac{1}{1+a}$, e $-1+\log(1+a)$ che possono considerarsi anche fuori del cerchio per tutto l'asse delle quantità reali e positive, Borel per somma delle serie stesse (13) e (14) viene ad introdurre rispettivamente gli integrali $\int_0^\infty \frac{e^{-a}}{1+a}da$ e $\int_0^\infty e^{-a}\{-1+\log(1+a)\}da$ e le serie medesime risultano assolutamente sommabili.

74. Accennato così a tutti questi particolari noi, pure riferendoci talvolta alla considerazione dell'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da$$

Digitized by Google

per una serie $\sum u_n$ anche nel caso più generale ora indicato rispetto alla funzione $u(a)$, ci limiteremo però sempre (come fa anche il Borel) finchè non si avverta espressamente il contrario, alla considerazione delle serie assolutamente sommabili, per le quali la serie associata corrispondente (12) è una funzione intera $u(a)$ di a, chiamando *somma B* la somma di Borel $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da$, per non confonderla colle somme ordinarie delle serie che si hanno soltanto quando sono convergenti, e chiamando *serie sommabili B* o *assolutamente sommabili B* nei rispettivi casi le serie corrispondenti.

75. Intesi su tutto questo, faremo ora qualche studio sulle somme di Borel per le serie sommabili B, e specialmente pel caso della somma e dei prodotti di queste serie.

Osserviamo perciò dapprima che dalle considerazioni generali che abbiamo fatto risulta già che *le serie convergenti sono anche necessariamente sommabili B, e la loro somma B è precisamente la somma ordinaria della serie;* mentre è facile vedere che *le serie divergenti quando sono reali e a termini positivi non sono mai sommabili B* (*).

In questo caso infatti avendosi dalla serie associata

$$\int_0^a e^{-a} u(a)\, da = \sum_0^\infty \frac{u_n}{\pi(n)} \int_0^a e^{-a} a^n\, da$$

(*) Quando per definizione della somma B di una serie $\sum u_n$ si prende il limite della espressione (1) per $a = \infty$ è certo che se la serie della quale ci si occupa è divergente e ha per somma $\pm\infty$ anche la somma di Borel è $\pm\infty$; ma quando per questa somma B si presenta invece come ora facciamo l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da$ e siccome a questo si giunse supponendo che l'espressione (1) avesse un limite s determinato e finito per $a = \infty$, il caso delle serie divergenti $\sum u_n$ aventi per somma $\pm\infty$ va considerato a parte come appunto qui facciamo per le serie divergenti a termini positivi.

Digitized by Google

e la serie del secondo membro essendo a termini positivi e ognuno di questi termini crescenti con a, è certo che questa serie pure essendo convergente per ogni valore positivo e finito di a, crescerà continuamente e tenderà all'infinito con a perchè i suoi termini tenderanno verso $\frac{u_n}{\pi(n)}\int_0^\infty e^{-a}a^n\,da$, cioè appunto verso quelli della serie divergente $\sum u_n$; e questo porta facilmente a dire che l'integrale del primo membro crescerà indefinitamente e si avrà

$$\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da = \infty .$$

Segue da ciò *che le serie dei moduli delle serie che, pur essendo convergenti, lo sono soltanto condizionatamente, non saranno mai sommabili B;* mentre le serie $\sum u_n$ convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini non sono solo sommabili B esse, come lo sono tutte le serie convergenti, ma sono sommabili anche le serie dei loro moduli $\sum u'_n$; e poichè la serie associata di queste e le loro serie derivate vengono ad essere le serie associate delle serie

$$u'_0+u'_1+u'_2+u'_3+\ldots+u'_n+\ldots$$
$$u'_1+u'_2+u'_3+u'_4+\ldots+u'_{n+1}+\ldots$$
$$u'_2+u'_3+u'_4+u'_5+\ldots+u'_{n+2}+\ldots$$

che sono tutte convergenti; ne segue che indicando con $\bar{u}(a)$, $\bar{u}'(a)$, $\bar{u}''(a)\ldots$ le somme delle dette serie associate, gli integrali $\int_0^\infty e^{-a}\bar{u}(a)\,da$, $\int_0^\infty e^{-a}\bar{u}'(a)\,da$, $\int_0^\infty e^{-a}\bar{u}''(a)\,da\ldots$ hanno tutti un significato; e poichè evidentemente $|u(a)|\leq\bar{u}(a)$ $|u'(a)|\leq\bar{u}'(a)$, $|\bar{u}''(a)|\leq\bar{u}''(a)$, ne risulta che anche gli integrali $\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|\,da$, $\int_0^\infty e^{-a}|u'(a)|\,da$, $\int_0^\infty e^{-a}|u''(a)|da,\ldots$ hanno

Digitized by Google

tutti un significato; e questo permette di dire che le *serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini non solo sono sommabili B, ma sono anche assolutamente sommabili B*

76. Osserviamo ora in generale che essendo

$$15) \qquad u_0+u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1}+\ldots+u_n+\ldots$$

una serie sommabile B per la quale la serie associata

$$16) \quad u_0+\frac{u_1 a}{1}+\frac{u_2 a^2}{\pi(2)}+\ldots+\frac{u_k a^k}{\pi(k)}+\frac{u_{k+1}a^{k+1}}{\pi(k+1)}+\ldots+\frac{u_n a^n}{\pi(n)}+\ldots$$

è una funzione intera $u(a)$, se si mutano i suoi primi $k+1$ termini passando dalla serie (15) all'altra

$$17) \qquad \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+u_{k+1}+\ldots+u_n+\ldots$$

e intendendo che in questa anche quei termini fra i primi $k+1$ che fossero nulli debbano riguardarsi come esistenti segnando al loro posto degli zeri, la sua serie associata sarà la seguente

$$18) \quad \alpha_0+\frac{\alpha_1 a}{1}+\frac{\alpha_2 a^2}{\pi(2)}+\ldots.+\frac{\alpha_k a^k}{\pi(k)}+\frac{u_{k+1}a^{k+1}}{\pi(k+1)}+\ldots.+\frac{u_n a^n}{\pi(n)}+\ldots$$

e rappresenterà ancora una funzione intera $U(a)$ di a per la quale si avrà

$$19) \quad U(a)=u(a)+(\alpha_0-u_0)+(\alpha_1-u_1)\frac{a}{1}+(\alpha_2-u_2)\frac{a^2}{\pi(2)}+\ldots.+(\alpha_k-u_k)\frac{a^k}{\pi(k)},$$

e l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}U(a)\,da$ avrà esso pure un significato, e sarà

$$\int_0^\infty e^{-a}U(a)\,da=\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da+\alpha_0-u_0+\alpha_1-u_1+\alpha_2-u_2+\ldots+\alpha_k-u_k,$$

Digitized by Google

cioè anche la nuova serie (15) sarà sommabile B, e la sua somma B differirà da quella delle serie primitive (15) solo per la differenza della somma dei primi $k+1$ termini precisamente come avviene per le serie convergenti.

E siccome calcolando successivamente anche le derivate di $U(a)$ per mezzo della (19) si vede, che, come si ha

$$|U(a)| \leq |u(a)| + |\alpha_0 - u_0| + |\alpha_1 - u_1|\frac{a}{1} + |\alpha_2 - u_2|\frac{a^2}{\pi(2)} + \ldots + |\alpha_k - u_k|\frac{a^k}{\pi(k)},$$

si ha in generale per $\lambda \leq k$

$$|U^{(\lambda)}(a)| \leq |u^{(\lambda)}(a)| + |\alpha_\lambda - u_\lambda| + \ldots + |\alpha_k - u_k|\frac{a^{k-\lambda}}{\pi(k-\lambda)}$$

e $$U^{(k+1)}(a) = u^{(k+1)}(a) \qquad U^{(k+2)}(a) = u^{(k+2)}(a) \ldots$$

si conclude anche che se la serie data (15) è assolutamente sommabile B, lo stesso sarà della nuova serie (17) nella quale i primi $k+1$ termini sono cambiati.

77. Fermandoci ora sul caso in cui i primi $k+1$ termini $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, della nuova serie (17) siano tutti zero, osserviamo che se al posto loro si segnano effettivamente degli zero, valgono senza altro le considerazioni che ora abbiamo fatto; ma se quegli zeri non si scrivono affatto, ciò che equivale a sopprimere senz'altro i primi $k+1$ termini della serie data (15), allora poichè la nuova serie diviene la seguente

$$20) \qquad u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n + \ldots,$$

e ha per primo termine u_{k+1}, la sua serie associata non sarà più quella che risulterebbe dalle (18) facendovi $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, ma sarà l'altra

$$21) \qquad u_{k+1} + u_{k+2}\frac{a}{1} + u_{k+3}\frac{a^2}{\pi(2)} + \ldots + u_n\frac{a^{n-k-1}}{\pi(n-k-1)} + \ldots$$

Digitized by Google

ed essa sarà ancora una funzione intera $U_k(a)$ che corrisponderà precisamente alla derivata $(k+1)^a$ di $u(a)$ cioè sarà $U_k(a) = u^{(k+1)}(a)$.

Ora integrando per parti si ha

$$\int_0^a e^{-a} U_k(a)\,da = \int_0^a e^{-a} u^{(k+1)}(a)\,da = \left(e^{-a} u^{(k)}(a)\right)_0^a +$$

$$+ \int_0^a e^{-a} u^{(k)}(a)\,da = -u_k + e^{-a} u^{(k)}(a) + \int_0^a e^{-a} u^{(k)}(a)\,da,$$

e integrando di nuovo per parti successivamente si trova

$$\int_0^a e^{-a} U_k(a)\,da = -u_0 - u_1 - u_2 - \ldots - u_k + \left\{e^{-a} u(a) + \right.$$

$$\left. + e^{-a} u'(a) + \ldots + e^{-a} u^{(k)}(a)\right\} + \int_0^a e^{-a} u(a)\,da,$$

e quindi *se la serie data sarà assolutamente sommabile B*, poichè allora per quanto si vide nel § 72 i prodotti

22) $\qquad e^{-a} u(a), \qquad e^{-a} u'(a), \quad \ldots, \quad e^{-a} u^{(k)}(a), \ldots$

hanno tutti per limite zero per $a = \infty$, se ne deduce subito che l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} U_k(a)\,da$ avrà un significato e si avrà

$$\int_0^\infty e^{-a} U_k(a)\,da = -u_0 - u_1 - u_2 - \ldots - u_k + \int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da;$$

e per questo, e perchè essendo $U_k(a) = u^{(k+1)}(a)$ sarà $U'_k(a) = u^{(k+2)}(a)$, $U''_k(a) = u^{(k+3)}(a)$,.... si vede subito che *quando la serie data* (15) *sarà assolutamente sommabile* B *lo sarà anche la serie* (20) e la sua somma B *sarà appunto quella della serie* (15) *diminuita della somma* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k$ *dei termini soppressi, come per le serie convergenti.*

Digitized by Google

E se della serie data (15) si saprà soltanto che è sommabile B, tale sarà anche la serie (20) e avrà ancora per somma B quella della (15) diminuita della somma $u_0 + u_1 + \ldots + u_k$ dei termini soppressi, purchè allora si sappia che i prodotti (22) hanno tutti per limite zero per $a = \infty$ o si sappia che gli integrali $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da$, $\int_0^\infty e^{-a} u'(a)\,da$,... $\ldots \int_0^\infty e^{-a} u^{(k+1)}(a)\,da$ hanno tutti un significato.

78. Inversamente si può dimostrare che *se è assolutamente sommabile* **B** *la serie* (20) *che viene dalla* (15) *sopprimendovi i primi* $k+1$ *termini, tale sarà anche questa serie* (15).

Per questo basterà fare vedere che quando è assolutamente sommabile B la serie (20) corrispondente all'indice k, tale sarà anche la serie analoga corrispondente all'indice $k-1$.

Incominciamo perciò col fare una osservazione generale, quella cioè che *se una funzione* $\varphi(a)$ *pei valori positivi di* a *da un certo valore di* a *in poi fino all'infinito è sempre positiva e cresce continuamente e la sua derivata* $\varphi'(a)$ (che non sarà mai negativa) *è essa pure sempre finita e continua* (*o almeno integrabile in ogni intervallo finito*) *allora il prodotto* $e^{-a}\varphi(a)$ *tenderà sempre a zero al crescere indefinito di* a. *quando vi tenda l'altro prodotto* $e^{-a}\varphi'(a)$, *e i due integrali* $\int_\alpha^\infty e^{-a}\varphi(a)\,da$ *e* $\int_\alpha^\infty e^{-a}\varphi'(a)\,da$ *avranno insieme un significato.*

E difatti se a partire da un certo valore di a avremo $e^{-a}\varphi'(a) < \varepsilon$, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo dato, sarà $\varphi'(a) < \varepsilon e^a$; e integrando fra a_1 e un numero comunque grande a, avremo $\varphi(a) - \varphi(a_1) < \varepsilon e^a - \varepsilon e^{a_1}$ ovvero $\varphi(a) < \varepsilon e^a + \varphi(a_1) - \varepsilon e^{a_1}$, e $e^{-a}\varphi(a) < \varepsilon + \{\varphi(a_1) - \varepsilon e^{a_1}\} e^{-a}$; e di qui, tenendo fisso a_1 e facendo crescere a indefinitamente, si vede che il prodotto $e^{-a}\varphi(a)$ finirà per

Digitized by Google

essere piccolo e restare piccolo quanto si vuole e avrà quindi per limite zero per $a=\infty$. E avendosi colla integrazione per parti $\int_\alpha^a e^{-a}\varphi(a)\,da = -\left(e^{-a}\varphi(a)\right)_\alpha^a + \int_\alpha^a e^{-a}\varphi'(a)\,da$ i due integrali $\int_\alpha^\infty e^{-a}\varphi(a)\,da$ e $\int_\alpha^\infty e^{-a}\varphi'(a)\,da$ verranno ad avere insieme un significato, o non ne avranno nessuno nè l'uno nè l'altro.

Ciò posto, osserviamo che se si pone $\int_0^a |U_k(a)|\,da = \varphi(a)$ sarà $|U_k(a)| = \varphi'(a)$, e $\varphi(a)$ e $\varphi'(a)$ saranno ambedue positivi; e poichè il prodotto $e^{-a}U_k(a)$ tenderà a zero al crescere indefinito di a perchè la serie (20) si suppone assolutamente sommabile (§ 72), lo stesso accadrà del prodotto $e^{-a}|U_k(a)|$ cioè di $e^{-a}\varphi'(a)$.

Ne segue, per quanto abbiamo dimostrato, che anche il prodotto $e^{-a}\int_0^a |U_k(a)|\,da$ che corrisponde a $e^{-a}\varphi(a)$ avrà per limite zero per $a=\infty$; e poichè pei nostri dati l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}|U_k(a)]\,da$ che corrisponde all'integrale $\int_0^\infty e^{-a}\varphi'(a)\,da$ ha un significato, anche l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}\left(\int_0^\infty |U_k(a)|\,da\right)da$ che corrisponde a $\int_0^\infty e^{-a}\varphi(a)\,da$, avrà esso pure un significato; e poichè essendo $U'_{k-1}(a) = U_k(a)$ si ha:

$$U_{k-1}(a) = u_k + \int_0^a U_k(a)\,da \quad \text{e} \quad |U_{k-1}(a)| \leq |u_k| + \left|\int_0^a U_k(a)\,da\right|$$

e

$$|U_{k-1}(a)| \leq |u_k| + \int_0^a |U_k(a)|\,da \quad \text{e} \quad e^{-a}|U_{k-1}(a)| \leq e^{-a}|u_k| + e^{-a}\int_0^a |U_k(a)|\,da$$

Digitized by Google

e quindi

$$\int_0^a e^{-a}|U_{k-1}(a)|da\,|\leq u_k|(1-e^{-a})+\int_0^a e^{-a}\left(\int_0^a|U_k(a)|da\right)da,$$

se ne deduce subito che l'integrale $\int_0^a e^{-a}|U_{k-1}(a)|da$ ha un significato, e che il prodotto $e^{-a}|U_{k-1}(a)|$ e quindi anche l'altro $e^{-a}U_{k-1}(a)$ hanno per limite zero per $a=\infty$.

D'altra parte avendosi

$$\int_0^a e^{-a}U_k(a)da=\int_0^a e^{-a}U'_{k-1}(a)da=\left(e^{-a}U_{k-1}(a)\right)_0^a+\int_0^a e^{-a}U_{k-1}(a)da$$

e l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}U_k(a)da$ avendo un significato e il prodotto $e^{-a}U_{k-1}(a)$ avendo per limite zero per $a=\infty$, anche l'integrale $\int_0^a e^{-a}U_{k-1}(a)da$ avrà un significato e sarà

$$\int_0^\infty e^{-a}U_{k-1}(a)da=u_k+\int_0^\infty e^{-a}U_k(a)da$$

e resta così pienamente dimostrato quanto volevano.

79. Combinando i risultati ottenuti negli ultimi tre paragrafi, si vede chiaramente come nelle serie assolutamente sommabili B si possa cambiare il posto di un numero *limitato* di termini o sostituire a uno o più gruppi di un numero finito di termini la loro somma senza alterare la loro sommabilità assoluta B e la loro somma B precisamente come nelle serie convergenti.

E se si avranno più serie in numero finito $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$, ..., assolutamente sommabili B, lo stesso accadrà della serie $a\sum u_n+b\sum v_n+c\sum w_n+\ldots$ essendo $a, b, c, \ldots$ numeri finiti qualsiasi.

Digitized by Google

80. Passando ora al caso del prodotto della serie ci sarà facile anche di dimostrare con Borel che: *se* $\sum u_n$ e $\sum v_n$ *sono due serie assolutamente sommabili B e u e v sono la loro somma B, anche la serie* $\sum w_n$ *ottenuta colla regola dei prodotti, nella quale cioè si ha*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0,$$

sarà assolutamente sommabile B, e la sua somma B sarà il prodotto u v delle somme B delle serie date, precisamente come accade nel caso delle serie convergenti per le quali la regola di moltiplicazione di Cauchy è applicabile.

Per questo osserviamo che le serie associate delle due $\sum u_n$ e $\sum v_n$ saranno le seguenti

$$23) \quad u_0 + u_1 \frac{a}{1} + u_2 \frac{a^2}{\pi(2)} + u_3 \frac{a^3}{\pi(3)} + \ldots + u_n \frac{a^n}{\pi(n)} + \ldots,$$

$$24) \quad v_0 + v_1 \frac{b}{1} + v_2 \frac{b^2}{\pi(2)} + v_3 \frac{b^3}{\pi(3)} + \ldots + v_n \frac{b^n}{\pi(n)} + \ldots,$$

che avranno rispettivamente per somma le funzioni intere $u(a)$ e $v(b)$; e le somme B — che indicheremo con u e v — delle serie date $\sum u_n$ e $\sum v_n$ saranno gli integrali $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da$ e $\int_0^\infty e^{-b} v(b)\, db$; e il prodotto $u\,v$ sarà il prodotto di questi due integrali.

Ora il prodotto $u\,v$ di questi integrali si può riguardare anche come il limite dell'integrale doppio $\iint e^{-a-b} u(a) v(b)\, da\, db$ esteso nel piano degli assi a e b ad un rettangolo R_{a_0, b_0} formato dai lati di equazione $b = 0$, $a = a_0$, $b = b_0$, $a = 0$, quando questo rettangolo si estende all'infinito facendo crescere a_0 e b_0 con leggi qualsiasi; giacchè avendo

Digitized by Google

i due integrali $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\,da$ e $\int_0^\infty e^{-b} v(b)\,db$ un significato, se a_0 e b_0 saranno numeri qualsiasi superiori a certi numeri sufficientemente grandi $\bar{a}$ e $\bar{b}$, gli stessi integrali saranno rispettivamente uguali a $\int_0^{a_0} e^{-a} u(a)\,da + r_{a_0}$ e $\int_0^{b_0} e^{-b} v(b)\,db + r_{b_0}$ essendo r_{a_0} e r_{b_0} arbitrariamente piccoli; e quindi il loro prodotto, cioè $u\,v$, differirà tanto poco quanto si vuole dal prodotto degli integrali $\int_0^{a_0} e^{-a} u(a)\,da$ e $\int_0^{b_0} e^{-b} v(b)\,db$ ossia dall'integrale doppio $\iint e^{-a-b} u(a)\,v(b)\,da\,db$ esteso al rettangolo suddetto $R_{a_0,\,b_0}$.

Ne segue che questo integrale doppio avrà un limite determinato e finito all'estendersi di $R_{a_0,\,b_0}$ all'infinito col crescere indefinitamente in modo qualsiasi di a_0 e b_0, e questo limite sarà il prodotto $u\,v$, per modo cioè che si avrà

$$u\,v = \lim \iint e^{-a-b} u(a)\,v(b)\,da\,db\,.$$

essendo l'integrale esteso a quel rettangolo $R_{a_0,\,b_0}$. E poichè per la ipotesi fatta della sommabilità assoluta B delle serie date gli integrali che rappresentano la loro somma B conservano un significato anche quando alle funzioni $u(a)$ e $v(b)$ si sostituiscono i loro valori assoluti, lo stesso avverrà col fare questa sostituzione anche pel limite dell'integrale doppio che figura nell'ultima formola che dà il prodotto $u\,v$.

Ciò posto osserviamo in generale che quando si ha un integrale doppio $\iint f(a,b)\,da\,db$ esteso al suddetto rettangolo $R_{a_0,\,b_0}$ se si fa un cangiamento di variabili colle for-

Digitized by Google

mole $x=a+b$, $y=a-b$, o $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\frac{x-y}{2}$, l'integrale stesso si trasforma coi noti processi nell'altro

$$\iint f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \frac{dx\,dy}{2},$$

esteso sul piano xy degli assi x, y ad un rettangolo posto dalla parte positiva dell'asse x che ha un vertice nell'origine $x=0$ e ha i lati inclinati di 45° sui due assi e uguali uno a $a_0\sqrt{2}$ e l'altra a $b_0\sqrt{2}$, e si può scrivere

$$\iint_{R_{a_0,b_0}} f(a,b)\,da\,db = \int_0^{a_0+b_0} dx \int_{-x}^{x} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2};$$

e se il primo integrale ha un limite nell'estendersi del rettangolo R_{a_0,b_0} all'infinito lo stesso avverrà del secondo membro; cioè l'integrale $\int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{x} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2}$ avrà un significato e *si avrà la formola notevole*

$$\lim \iint f(a,b)\,da\,db = \int_0^{\infty} dx \int_{-x}^{x} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2}. \text{ (*)}$$

(*) Qui è occorsa una leggera svista, che non altera però il risultato finale.

La formula

$$\iint_{R_{a_0 b_0}} f(a\,b)\,da\,db = \int_0^{a_0+b_0} dx \int_{-x}^{x} f\left(\frac{y+x}{2}, \frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2}$$

non è esatta; ma, quando (come nel nostro caso) si ammetta che esista l'integrale doppio

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |f(a\,b)|\,da\,db,$$

Digitized by Google

Applicando questa formola al caso nostro, cioè all'integrale $\lim \iint e^{-a-b} u(a) v(b) da\, db$ e ponendo

$$25) \qquad w(x) = \int_{-x}^{x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2},$$

avremo dunque

$$26) \qquad uv = \int_{0}^{\infty} e^{-x} w(x)\, dx,$$

e l'integrale del secondo membro avrà un significato, come lo avrà quello che si otterrebbe sostituendo a $u(a)$ e $v(b)$ e quindi a $w(x)$ i loro valori assoluti; e ora sarà facile vedere che $w(x)$ è appunto la somma della serie $\sum_{0}^{\infty} w_n \frac{x^n}{\pi(n+1)}$ che è la serie associata dell'altra $0 + \sum_{0}^{\infty} w_n$, e quindi l'integrale precedente è appunto la somma B di questa serie $0 + \sum_{0}^{\infty} w_n$.

Si osservi per questo che potendosi alle serie (23) e (24) che rappresentano le funzioni $u(a)$ e $v(b)$ applicarela regola di moltiplicazione di Cauchy perchè esse sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, basterà

è vera la formula ultima:

$$\lim_{\substack{a_0 \to \infty \\ b_0 \to \infty}} \iint_{R_{a_0 b_0}} f(ab)\, da\, db = \int_{0}^{\infty} dx \int_{-x}^{x} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2}$$

Per la dimostrazione di questa asserzione, vedi:

SANNIA. *Serie assolutamente sommabili col metodo di Borel generalizzato* — (Atti della R. Accademia di Torino. Vol. LVI, 1920-21. Seduta del 3 aprile 1921). [N].

Digitized by Google

cambiarvi a in $\frac{x+y}{2}$ e b in $\frac{x-y}{2}$ per ottenere subito la formola seguente

$$27) \qquad u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ \frac{u_0 v_n (x-y)^n}{\pi(0)\pi(n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{u_1 v_{n-1} (x-y)^{n-1}(x+y)}{\pi(1)\pi(n-1)} + \frac{u_2 v_{n-2}(x-y)^{n-2}(x+y)^2}{\pi(2)\pi(n-2)} + \ldots + \frac{u_n v_0 (x+y)^n}{\pi(n)\pi(0)} \right\},$$

nella quale la serie del secondo membro non solo sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, ma sarà anche convergente in ugual grado rispetto ad y quando x è finito e y è fra $-x$ e x (gli estremi inclusi); per modo che potremo applicarle l'integrazione per serie termine a termine rispetto ad y da $-x$ a x, e allora in ogni termine comparirà un integrale della forma $\int_{-x}^{x} (x-y)^p (x+y)^q dy$ con p e q numeri interi nulli o positivi.

Questo integrale per $p=0$ è $\frac{(x+y)^{q+1}}{q+1}$ e per $p>0$ colla integrazione per parti diviene

$$\left(\frac{(x-y)^p (x+y)^{q+1}}{q+1}\right)_{-x}^{x} + \frac{p}{q+1} \int_{-x}^{x} (x-y)^{p-1} (x+y)^{q+1} dy$$

ovvero

$$\frac{p}{q+1} \int_{-x}^{x} (x-y)^{p-1} (x+y)^{q+1} dy ,$$

e applicando altre integrazioni per parti successive si giunge infine alla formola seguente

$$\int_{-x}^{x} (x-y)^p (x+y)^q dy = \frac{\pi(p)}{(q+1)(q+2)\ldots(q+p+1)} (2x)^{p+q+1} =$$

$$= \frac{\pi(p)\pi(q)}{\pi(p+q+1)} (2x)^{p+q+1}$$

Digitized by Google

che vale anche per $p=0$; e ora sostituendo nella formola che viene dalla (27) quando vi si fa la integrazione termine a termine, si trova

$$\int_{-x}^{x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2}=\sum_{0}^{\infty}(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0)\frac{x^{n+1}}{\pi(n+1)}$$

Ne segue che per la funzione $w(x)$ data dalla (25) si ha

$$28)\qquad w(x)=\sum_{0}^{\infty}w_n\frac{x^{n+1}}{\pi(n+1)};$$

ciò che, per la (26), mostra appunto come abbiamo detto che il prodotto uv viene ad essere la somma B della serie seguente

$$0+w_0+w_1+w_2+\ldots+w_n+\ldots.$$

Questo dunque risulta sommabile B, ma non può anche dirsi *assolutamente* sommabile B, e quindi neppure può dirsi anche (§ 77) che corrisponda alla somma B della serie $\sum_{0}^{\infty}w_n$, perchè, mentre abbiamo già dimostrato che anche l'integrale $\int_0^{\infty}e^{-x}|w(x)|\,dx$ ha un significato, non abbiamo anche dimostrato che lo stesso avviene per gli altri integrali

$$\int_0^{\infty}e^{-x}|w'(x)|\,dx,\quad \int_0^{\infty}e^{-x}|w''(x)|\,dx,\ldots$$

81. Per dimostrare questo prendiamo a considerare le due serie

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$
$$v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}+v_n+\ldots,$$

Digitized by Google

delle quali la prima risulta dalla $\sum_0^\infty u_n$ sopprimendovi il primo termine u_0 e sarà quindi assolutamente sommabile B (§ 77) come la $\sum_0^\infty u_n$.

Applicando a queste due serie il processo precedente e indicando con $\theta(x)$ la funzione che in questa serie corrisponde a quella che indicammo sopra con $w(x)$ pel caso delle due serie $\sum u_n$ e $\sum v_n$, e osservando che il termine corrispondente a w_n per le due nuove serie sarà

$$u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n+1} v_0 = w_{n+1} - u_0 v_{n+1},$$

se ne deduce che sarà per la (28)

$$\theta(x) = \Sigma (w_{n+1} - u_0 v_{n+1}) \frac{x^{n+1}}{\pi(n+1)} = w'(x) - u_0 v(x) + u_0 v_0,$$

e quindi si avrà $|w'(x)| \leq |\theta(x)| + |u_0||v(x)| + |u_0 v_0|$; e siccome per le nostre ipotesi l'integrale $\int_0^\infty e^{-x}|v(x)|\,dx$ ha un significato, e per quanto abbiamo dimostrato lo stesso è dell'integrale $\int_0^\infty e^{-x}|\theta(x)|\,dx$, anche l'integrale $\int_0^\infty e^{-x}|w'(x)|\,dx$ avrà un significato.

Partendo poi dalle due serie

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

si dimostra al modò stesso che anche l'integrale $\int_0^\infty e^{-x}|w''(x)|dx$ ha un significato, e lo stesso si dimostrerà poi successivamente per gli altri integrali $\int_0^\infty e^{-x}|w'''(x)|\,dx$, $\int_0^\infty e^{-x}|w^{IV}(x)|dx\dots$;

Digitized by Google

e rimarrà così dimostrato pienamente che anche la serie $\sum w_n$ è assolutamente sommabile B, e ha per somma B il prodotto uv delle somme B delle due serie $\sum u_n$ e $\sum v_n$.

82. Da questi teoremi sulla addizione e sulla moltiplicazione delle serie assolutamente sommabili B, se ne deduce subito con Borel l'altro più generale che dice che: *Se si ha un polinomio* $P(u_1, u_2, u_3, \ldots u_k)$ *in un numero finito* k *di quantità* $u_1, u_2, u_3, \ldots u_k$, *e se al posto di queste quantità si pongono serie assolutamente sommabili* B, *e si fanno i calcoli come si farebbero trattandosi di serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, si giungerà ad una serie assolutamente sommabile* B *il cui valore sarà uguale precisamente al valore che prenderebbe il polinomio stesso ponendo al posto delle quantità stesse* $u_1, u_2, u_3, \ldots u_k$ *le somme* B *delle serie corrispondenti.*

83. Premesse queste considerazioni generali, passiamo ora, sempre come fa il Borel, a considerare una serie $\sum u_n z^n$ ordinata per le potenze intere e positive di z, per la quale neppure escluderemo che il cerchio di convergenza possa ridursi al punto $z=0$; e ammettiamo che per un punto M_0 che corrisponde a un valore finito (reale o complesso) z_0 di z la stessa serie $\sum u_n z^n$ sia assolutamente sommabile B, potendo questo punto M_0 non appartenere al cerchio di convergenza, e quindi potendo in esso la serie non essere convergente.

Allora si può dimostrare con Borel che *la serie stessa* $\sum u_n z^n$ *sarà assolutamente sommabile* B *in ogni punto della retta* OM_0 *che va dal punto* $z=0$ *al punto* M_0, *e la sua somma* B *considerata in questi punti* z *di* OM_0 *avrà per valori quelli di una funzione* $\varphi(z)$ *di* z *che non ha singolarità nei punti interni al cerchio* C *che ha per diametro* OM_0. E poichè questa funzione $\varphi(z)$ dentro il cerchio di convergenza della serie

Digitized by Google

$\sum u_n z^n$ (quando questo cerchio non si riduce al punto $z=0$) sarà precisamente la funzione $w(z)$ che collo sviluppo di Taylor dà luogo alla serie $\sum u_n z^n$ perchè sulla parte di OM_0 che appartiene a questo cerchio coinciderà con $w(z)$, così nei punti del suddetto cerchio C che risultano esterni a questo cerchio di convergenza la funzione stessa $\varphi(z)$ sarà il prolungamento di quella funzione $w(z)$.

Per dimostrare questo teorema (che è certo notevolissimo) sulle somme B di una serie $\sum u_n z^n$, procederemo nel modo seguente, che in sostanza è quello stesso indicato da Borel.

Si osservi che ammettendo come facciamo che la serie $\sum u_n z^n$ sia sommabile B nel punto z_0, noi per le limitazioni che al § 74 dicemmo di fare in questo studio, veniamo ad ammettere che la sua serie associata

$$u_0 + \frac{u_1 z a}{1} + \frac{u_2 z^2 a^2}{\pi(2)} + \ldots + \frac{u_n z^n a^n}{\pi(n)} + \ldots$$

sia una funzione intera di a per $z=z_0$, e quindi lo stesso accadrà pei valori di z relativi ai punti di OM_0 e in genere pei punti z il cui modulo non è superiore a quello di z_0, perchè per questi punti z la serie stessa potrà scriversi sotto la forma $\sum \frac{u_n z_0^n a^n}{\pi(n)} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ e i termini di questa hanno i moduli inferiori o tutt'al più uguali a quelli della serie associata della serie $\sum u_n z_0^n$(*).

(*) Questo del resto è conseguenza immediata del fatto che se una serie $\Sigma a_n z^n$ è convergente per un valore z_0 di z essa è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per ogni punto z interno al cerchio di raggio $|z_0|$.

Digitized by Google

Evidentemente dunque la serie associata della $\sum u_n z^n$ pei punti z che cadono su OM_0 sarà una funzione intera di a che potremo indicare con $u(z,a)$ ma che col porre $za=t$ potrà anche indicarsi con $F(t)$ essendo in questa $t=az$; e poichè supponiamo che la nostra serie pel punto M_0 sia assolutamente sommabile B, la sua somma B sarà l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} F(z_0 a)\,da$, e oltre a questo integrale avranno un significato anche gli altri

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda F(t)}{da^\lambda} \right|_{t=z_0 a} da = z_0^\lambda \int_0^\infty e^{-a} \left| F^{(\lambda)}(t)_{t=z_0 a} \right| da$$

per tutti i valori interi 0, 1, 2, 3.... di λ; e per dimostrare la prima parte del teorema basterà far vedere che tutti questi integrali conservano un significato anche quando vi figura z invece di z_0 e z sia in un punto qualsiasi di OM_0, cioè se, essendo $z_0=\varrho_0 e^{i\vartheta_0}$, si abbia $z=\varrho e^{i\vartheta_0}$ con $\varrho < \varrho_0$.

Per questo osserviamo che quando al posto di z_0 sia messo z i detti integrali possono scriversi sotto la forma

$$z^\lambda \int_0^\infty e^{-a} \left| F^{(\lambda)}\left(\frac{\varrho a}{\varrho_0}\varrho_0 e^{i\vartheta_0}\right)\right| da,$$

la derivata $F^{(\lambda)}$ intendendosi presa rispetto all'intiero argomento t o $\frac{\varrho}{\varrho_0} a\,\varrho_0 e^{i\vartheta_0}$, e supponendo senz'altro che z o ϱ non siano zero (giacchè per $z=0$ gli integrali stessi hanno evidentemente un significato) e ponendo $\frac{\varrho a}{\varrho_0}=b$, potremo anche scriverli così $\frac{\varrho_0}{\varrho} z^\lambda \int_0^\infty e^{-b\frac{\rho_0}{\rho}} \left| F^{(\lambda)}(b\varrho_0 e^{i\vartheta_0})\right| db$; e poichè essendo $\frac{\varrho_0}{\varrho} > 1$ gli elementi di questi integrali, che sono

Digitized by Google

tutti positivi, saranno inferiori ai corrispondenti degli altri $\int_0^\infty e^{-a} \left| F^{\lambda)}(a\varrho_0 e^{i\theta_0}) \right| da$ che abbiamo considerati sopra, è certo che gli integrali stessi avranno tutti un significato; e con questo resta dimostrata appunto la prima parte del teorema.

Ora per dimostrare l'altra parte del teorema, cioè che la somma B della serie data $\sum u_n z^n$ nei punti z di OM_0 dà luogo ad una funzione analitica di z, consideriamo l'integrale $\frac{\varrho_0}{z'}\int_0^\infty e^{-b\frac{\varrho_0}{z'}} F(b\varrho_0 e^{i\theta_0})\,db$, dove z' è ciò che sarebbe z quando l'asse reale fosse su OM_0 (cioè $z' = z\,e^{-i\theta_0}$).

Questo integrale quando z' è reale ed è uguale a ϱ con $0 < \varrho < \varrho_0$, ha un significato per quanto abbiamo visto, e il suo valore allora è appunto la somma B della serie $\sum u_n z^n$ nel punto $z = \varrho e^{i\theta_0}$ corrispondente a quel valore di ϱ_0. Se poi $z' = \varrho e^{i\theta'}$ (sempre con $0 < \varrho < \varrho_0$), siccome b è reale, la parte reale di $\frac{b\varrho_0}{z'}$ sarà $\frac{b\varrho_0}{\varrho}\cos\theta'$, e se θ' sarà compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estremi esclusi) e sarà $\varrho \leq \varrho_0 \cos\theta'$, (come appunto avverrà quando descritto un cerchio su $0M_0$ come diametro, ϱ non è maggiore della corda di questo cerchio condotta da 0 e inclinata di un angolo $\pm\theta'$ su $0M_0$ che è appunto di lunghezza $\varrho_0\cos\theta'$, ossia quando il punto $z = z' e^{i\theta_0}$ o $z = \varrho e^{i(\theta'+\theta_0)}$ cade entro il detto cerchio), l'integrale evidentemente avrà un significato; e un significato quindi avrà pure la funzione

$$\frac{\varrho_0 e^{i\theta_0}}{z}\int_0^\infty e^{-b\frac{\varrho_0}{z}e^{i\theta_0}} F(b\varrho_0 e^{i\theta_0})\,db$$

in tutti i punti interni del detto cerchio descritto su $0M_0$ come diametro; e questa funzione che indicheremo con

Digitized by Google

$\varphi(z)$, e che col porre $b\varrho_0 e^{i\vartheta_0} = az$ potrà anche scriversi $\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-a} F(az)\,da$ sarà analitica e senza singolarità entro quel cerchio, e sopra $0M_0$ darà la somma B della serie data $\sum u_n z^n$.

Avendo poi riguardo ai teoremi sulla derivazione sotto il segno degli integrali estesi fra limiti infiniti, e tenendo conto della condizione posta che la serie data $\sum u_n z^n$ sia sommabile B in modo assoluto nel punto z_0 e quindi, come abbiamo dimostrato, su tutto il raggio $0M_0$, si vede che la somma B della serie data nei punti di $0M_0$ sarà data dalla funzione $\varphi(z)$ sopra indicata per $z = \varrho e^{i\vartheta_0}$ con $\varrho \leq \varrho_0$; e questa funzione $\varphi(z)$ avrà le derivate di qualsiasi ordine in ogni punto di $0M_0$ (M_0 al più escl.), e queste derivate nei punti di $0M_0$ diversi da 0 potranno ottenersi derivando sotto il segno rispetto a z l'integrale che rappresenta $\varphi(z)$.

84. Calcolando poi queste derivate di $\varphi(z)$ anche per $z=0$ prima però di fare la trasformazione (che allora non sarebbe ammissibile) dell'integrale colla formola $a\varrho = b$, si trova che queste derivate sono $u_0, u_1, u_2\,\pi(2), u_3\,\pi(3), \ldots$; e quindi se $z=0$ non è appunto un punto singolare di questa funzione $\varphi(z)$, la serie $\sum u_n z^n$ dove sarà convergente, sarà appunto lo sviluppo di Cauchy della stessa funzione $\varphi(z)$. In questo caso dunque questa serie, per la quale finora non sarebbe stato escluso che il cerchio di convergenza si riducesse al punto $z=0$, avrà di necessità un raggio di convergenza diverso da zero che potrà però essere inferiore ad $0M_0$, e la funzione $\varphi(z)$ nelle parti comuni al cerchio di convergenza C della serie data $\sum u_n z^n$ e al cerchio C_1 descritto su $0M_0$ come diametro coincideranno perfettamente, mentre nelle parti non comuni di questi due cerchi saranno il prolungamento l'una dell'altra. Quando poi per la fun-

Digitized by Google

zione $\varphi(z)$ il punto $z=0$ sia un punto singolare, la serie $\sum u_n z^n$, pure risultando sommabile B in modo assoluto su tutto il raggio $0M_0$, non sarà convergente altro che per $z=0$ nel qual punto si riduce a u_0. Nè questo può recare meraviglia perchè se la stessa serie fosse convergente anche soltanto in un punto M_1 di $0M_0$ essa avrebbe un cerchio di convergenza di raggio uguale almeno a $0M_1$, e nei punti interni a questo cerchio la somma ordinaria della serie e la somma B cioè $\varphi(z)$ sarebbero le stesse, e quindi $\varphi(z)$ non potrebbe avere singolarità nel punto $z=0$.

85. Del resto è anche facile di dimostrare con Borel che, come la funzione $\varphi(z)$ che dà la somma B della serie data $\sum u_n z^n$ su $0M_0$, quando essa è assolutamente sommabile B in M_0, ammette una derivata, la quale nel caso in cui la serie stessa ha un cerchio di convergenza che non si riduce al punto $z=0$ rappresenta entro il cerchio la derivata della serie, così anche nel caso generale questa serie derivata $\sum n u_n z^{n-1}$ della serie data $\sum u_n z^n$ sarà assolutamente sommabile B in tutto $0M_0$ tranne tutt'al più in M_0, e la sua somma B sarà precisamente la derivata $\varphi'(z)$ di $\varphi(z)$.

Preso infatti la serie associata

$$\omega(a,z)=u_1+\frac{2u_2 az}{1}+\frac{3u_3 a^2z^2}{1.2}+\frac{4u_4 a^3z^3}{1.2.3}+\ldots.$$

della serie derivata $\sum n u_n z^{n-1}$, e indicatala con $G(az)$, come indicammo con $F(az)$ la serie associata di quella data $\sum u_n z^n$, cioè

$$u_0+\frac{u_1 az}{1}+\frac{u_2 a^2 z^2}{1.2}+\frac{u_3 a^3 z^3}{1.2.3.}+\ldots,$$

con chè cambiato az in t si ha

$$G(t)=u_1+\frac{2u_2 t}{1}+\frac{3u_3 t^2}{1.2}+\frac{4u_4 t^3}{1.2.3}+\ldots,$$

$$F(t)=u_0+u_1 t+\frac{u_2 t^2}{1.2}+\frac{u_3 t^3}{1.2.3}+\ldots,$$

Digitized by Google

e quindi

$$F'(t) = u_1 + \frac{u_2 t}{1} + \frac{u_3 t^2}{1.2} + \frac{u_k t^3}{1.2.3} + \cdots,$$

si vede subito che si ha

$$29) \qquad G(t) = \frac{d}{dt}(t F'(t)),$$

e questo intanto ci assicura che la serie associata $\omega(a, z)$ della serie derivata $\sum n u_n z^{n-1}$ è una funzione intera di a per tutti i valori di z che cadono su OM_0 (il punto M_0 ora incluso), e ci assicura altresì che la funzione $G(t)$ ammette le derivate di qualsiasi ordine come $F(t)$.

Questo premesso, è chiaro che per dimostrare quanto abbiamo asserito, basterà ora fare vedere che, tenendo conto di quanto, per le ipotesi fatte, già sappiamo che avviene degli integrali $\int_0^\infty e^{-a}|F^{(\lambda)}(az)|\,da$, quando z è su OM_0 (M_0 incl.), si trova che anche gli integrali $\int_0^\infty e^{-a}|G^{(\lambda)}(az)|\,da$ hanno essi pure un significato per tutti i valori di λ finchè z è su OM_0 (M_0 ora al più escl.); e inoltre indicando, come facemmo sopra, con $\varphi(z)$ l'integrale $\int_0^\infty e^{-a} F(az)da$, si ha per gli stessi valori di z su OM_0 (cioè ora M_0 al più escl.)

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty e^{-a} G(az)\,da,$$

cioè la somma B della serie derivata è appunto la derivata della somma $\tilde{B}$ della serie data.

Per questo osserviamo che avendosi per la formola di Leibnitz sulle derivate dei prodotti

$$G^{(\lambda)}(t) = \frac{d^{\lambda+1}}{dt^{\lambda+1}}(t F'(t)) = t F^{(\lambda+2)}(t) \quad (\lambda+1) F^{(\lambda+1)}(t),$$

Digitized by Google

e quindi

$$|G^{(\lambda)}(t)| \leq |t F^{(\lambda+2)}(t)| + (\lambda+1)|F^{(\lambda+1)}(t)|,$$

sarà

$$\int_0^k e^{-a}|G^{(\lambda)}(az)|da \leq \int_0^k a e^{-a}|z F^{(\lambda+2)}(az)|da + (\lambda+1)\int_0^k e^{-a}|F^{(\lambda+1)}(az)|da;$$

e in questa formola pel secondo integrale del secondo membro si sa già che ha un limite determinato e finito per $k=\infty$ quando z è su OM_0 (M_0 per ora incl.).

Invece pel primo integrale del secondo membro della stessa formola, quando z è su OM ma non in O, si osserverà che posto, come già facemmo altre volte, $z=\varrho e^{i\theta_0}$ e $a\varrho=b$, esso integrale diviene $\frac{1}{\varrho}\int_0^{k\varrho} b e^{-\frac{b}{\varrho}}|F^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})|db$; e questo ha certo un limite determinato e finito al crescere indefinito di k quando non sia $\varrho=\varrho_0$ perchè, per quanto già vedemmo l'integrale $\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho_0}}|F^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})|db$ ha un significato, e finchè $\varrho<\varrho_0$ (ciò che esclude ora il punto M_0) almeno pei valori sufficientemente grandi di b si ha $be^{-\frac{b}{\varrho}} < e^{-\frac{b}{\varrho_0}}$ cioè gli elementi dell'integrale $\int_0^\infty be^{-\frac{b}{\varrho}}|F^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})|db$ che sono tutti positivi, almeno per questi valori sufficientemente grandi di b sono minori dei corrispondenti di questo ultimo integrale $\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho_0}}|F^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})|db$; e con questo resta evidentemente dimostrato che l'integrale $\int_0^\infty e^{-a}|G^{(\lambda)}(az)|da$ ha un significato finchè z è su OM_0 (escl. tutt'al più M_0 e incluso evidentemente anche il punto O o $z=0$ perchè allora si riduce a $G^{(\lambda)}(0)$ o a $(\lambda+1)u_{\lambda+1}$).

Digitized by Google

Resta ora a fare vedere che la somma B o $\int_0^\infty e^{-a} G(az)da$ della serie derivata è precisamente la derivata $\varphi'(z)$ della somma B o $\varphi(z)$ della serie data, e per questo si osserverà che avendosi per la (29)

$$G(az) = \frac{d}{d(az)}(az F'(az)) = \frac{d}{da}(a F'(az))$$

sarà

$$\int_0^k e^{-a} G(az)dz = \int_0^k e^{-a} \frac{d}{da}(a F'(az))da = (e^{-a} a F'(az))_0^k + \\ + \int_0^k a e^{-a} F'(az)da$$

e poichè col porre come più volte abbiamo fatto $z = \rho e^{i\theta_0}$ $a\rho = b$, o colle considerazioni esposte al § 72 in nota si vede che il termine $(e^{-a} a F'(az))_0^k$ ha per limite zero per $k = \infty$ finchè z è su OM_0, si conclude che sarà

$$\int_0^\infty e^{-a} G(az)dz = \int_0^\infty a e^{-a} F'(az)dz = \varphi'(z)$$

come appunto volevamo dimostrare.

86. Questi risultati veramente notevoli ottenuti da Borel lo condussero ad enunciare un teorema che ha pure la sua particolare importanza.

Egli osservò prima di tutto che siccome la somma B della serie $\sum u_n z^n$ che si suppone assolutamente sommabile B nel punto M_0 cioè per $z = z_0$, viene ad essere una funzione $\varphi(z)$ che è analitica nel cerchio di diametro $0M_0$, se la serie stessa avrà i suoi coefficienti $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ tutti zero questa funzione $\varphi(z)$ sarà necessariamente zero su tutto OM_0 come in tutti i punti del detto cerchio; e viceversa se si troverà che la funzione $\varphi(z)$ risulta sempre zero in tutto questo cerchio, lo stesso accadrà di tutte le sue derivate in ogni punto di OM_0 fra O e M_0 e anche nel punto

Digitized by Google

O, perchè andando in O su OM_0 i limiti di queste derivate esisteranno e saranno tutti zero, ed esistendo questi limiti essi saranno appunto le derivate della stessa funzione $\varphi(z)$ nel punto O calcolate lungo OM_0. Ma d'altra parte, come già osservammo il valore della funzione $\varphi(z)$ definito dall'integrale $\int_0^\infty e^{-a} F(az)\,da$ e quelli delle sue derivate nel punto $z=0$ sono appunto $u_0, u_1, u_2\,\pi(2), u_3\,\pi(3), \ldots$ e queste dovranno essere zero, ciò che porta appunto inversamente che: *quando la funzione analitica* $\varphi(z)$ *che corrisponde come somma B alle serie date* $\sum u_n z^n$ *è sempre zero, anche questa serie dovrà essere identicamente nulla.* Ed ora tenendo conto di queste osservazioni si può enunciare con Borel il teorema che dice che:

« *Essendo* $u_1, u_2, \ldots u_k$ *un numero finito di serie ordinate per potenze intere e positive di z che sono assolutamente sommabili B per* $z=z_0$ *cioè nel punto* M_0, *e essendo*

$$P(u_1, u_2 \ldots u_k;\ u'_1, u'_2, \ldots u'_k;\ \ldots u_1^{(\lambda)}, u_2^{(\lambda)}, \ldots u_k^{(\lambda)}, z)$$

un polinomio razionale intero rispetto ad $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *e alle loro derivate fino a quelle di ordine* λ, *e i cui coefficienti sono quantità costanti o sono polinomi in z che non divengono infiniti entro il cerchio di raggio* OM_0 *nè sul cerchio, o più generalmente sono serie ordinate per le potenze intere e positive di z che hanno un cerchio di convergenza di raggio superiore a* OM_0, *allora:*

Se in questo polinomio P al posto di $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *si pongono le serie corrispondenti e si fanno tutti i calcoli (compresi quelli delle derivazioni) come se queste serie fossero convergenti, si giunge ad una serie S, che è assolutamente sommabile B sopra* OM_0 *(il punto* M_0 *al più escluso) e che definisce una funzione analitica* $F(z)$ *senza alcuna singolarità nell'interno del cerchio descritto su* OM_0 *come diametro, e questa funzione* $F(z)$

Digitized by Google

è precisamente ciò che diviene P quando al posto di $u_1, u_2, \ldots u_k$ *ci si pongono non le serie ma le funzioni analitiche corrispondenti* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_k(z)$.

Questa funzione $F(z)$ *poi è identicamente nulla nel caso in cui la serie S ha tutti i suoi coefficienti nulli e solo in questo caso; cioè, quando avvenga che le serie* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *verifichino formalmente la relazione* $P(u_1, u_2, \ldots, u_k, u'_1, u'_2, \ldots, u'_k, \ldots, u_1^{(\lambda)}, u_2^{(\lambda)}, \ldots, u_k^{(\lambda)}, z) = 0$, *allora le funzioni analitiche* $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots \ldots, \varphi_k(z)$ *che corrispondono come somme B alle* $u_1, u_2, \ldots, u_k$, *verificano effettivamente questa relazione.*

Ricordando ora che Abel, mentre, dichiarò che le serie divergenti non erano affatto da usarsi, aggiunse che, pure tenendo fermo questo principio, non era però men vero che in molti casi il loro uso conduceva a risultati esatti e si riservava di cercarne le ragioni, possiamo dire che il teorema ora enunciato da Borel dà, almeno per certi casi, quelle ragioni che Abel aveva dichiarato di volere ricercare.

Aggiungiamo poi che Borel fà rilevare come il risultato da lui ottenuto si estende anche al caso al quale accennammo nel § 73, quello cioè in cui le serie associate delle serie date $\sum u_n z^n$ non sono funzioni intere di a; e per esso le serie assolutamente sommabili B possono applicarsi allo studio delle equazioni differenziali. Ed Egli lo applica in particolare alla ricerca dell'integrale y della equazione $x^2 y' = x - y$, che si riduce a zero per $x = 0$, e più generalmente alle equazioni $x^2 y' = w(x, y)$ dove $w(x, y)$ non contiene i termini di grado 0 o 1 in x (v. Mémoire sur les séries diverg. Annales de l'École Norm. 1899, pagg. 90-91 e pagg. 100 e seg.) e il suo libro: *Sur les series divergentes,* pagg. 115 e seg.).

N. B. La numerazione di questa memoria comincia col n.° 35, in quanto è stata omessa una parte delle lezioni stesse che trattava argomenti classici e noti [N.].

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google